

A számok varázslatos világa: avagy a szimbólumokban rejtőző szépség

„A matematikus műve legyen olyan szép, mint egy festő vagy egy költő alkotása. Az ötletek harmonizáljanak, mint a színek vagy a szavak.” (Godfrey H. Hardy)

Ⓐ *matematika* az egyik legnagyobb múltú tudomány és gyakran a tudományok királynőjének is nevezik. A jelentős ókori kultúrákban a legfontosabb tudománynak számított. A matematikában az emberi szellem minden szépsége érvényesül: a tervszerű, logikus megfontolások mellett ott van a szárnyaló képzelet, az analógiák és különbségek felismerése és még sok más szellemi funkció. A matematikában felfedezett, alapvető törvényszerűségek örökérvényűeknek bizonyultak. Kétszer kettő mindig négy volt és az is marad.

A számolás tudományát nagyra becsülik a szerelem tanában, a gazdagság tanában, a zenében és a drámában, a szakácművészetben, az orvostudományban, az építészetben, a versmértékben, a költészetben, a logikában és grammatikában, valamint egyéb dolgokban.

A *szám* tehát a matematika építőköve. Ez az alapvető szerepkör teszi kulcsfontosságúvá a számfogalom kialakulásának megismerését, amely nagyon hosszú folyamat volt, és a mai napig állandó fejlődésben van.

Valószínű, hogy már az ősember is megszámlált tárgyakat, például állatbőröket, kifogott halakat, stb. és különböző számokkal jelezte, hogy az azonos tárgyából hány darab van. Beszélt hét börről, nyolc halról, stb.

Kialakulnak a számrendszerek. A szám, tehát, elvont fogalom. Érthető, hogy a beszélni kezdő ember szavai között a számnevek aránylag későn jelentkeztek. Ezek is kezdetben jobbra minőséget jelentettek: sok, kevés, több stb. Az akkori időkben, mint a nyelvészek vizsgálataiból kiténik, az egy és a kettő, esetleg a három számnevek már léteztek. Csak a közös tapasztalat és a gondolkodás tette lehetővé, hogy az emberi agy több számot is kiemeljen a mennyiségek kusza halmazából. Ebben fontos szerepe volt a munkamegosztásnak is. A pásztorok például tudni akarták, hogy hány birkából áll a nyájuk és hogy hány káposztát kapnak a piacon pl. egy birkáért. A piacon a kereskedők és a vásárlók összehasonlították és összeadták az árakat. Aki hajózni akart, annak tudnia kellett, hogy melyik irányba induljon, ha célba akar jutni. A számok segítségével tanulta meg az ember mérni az időt, a távolságokat, a területet, és ezekkel mérte a térfogatot is. Egy piramis építéséhez az ókori egyiptomiaknak pl. tudniuk kellett, hogy mennyi kőre lesz szükségük. Ezekhez a bonyolult számításokhoz már írással is rögzítették a számokat.

A kereskedelem kétségkívül meggyorsította a számfogalom kialakulását. A fejlettebb kereskedelmi életet elérve történhetett, hogy a számokat a számolásnál kezdték csoportokba foglalni, például a kéz ujjainak mintájára ötös vagy tízes csoportokba. Így jöttek létre a *számrendszerek*, amelyekhez azután a számnevek kialakulása is igazodott. Megjegyezzük, hogy a számrendszer nem jelenti a *helyi érték* létezését is. A sokféle számrendszer között a tízes terjedt el legjobban, bár más számrendszerek emlékei, maradványai ma is élnek. Egy-egy nagyobb csoport, egy-egy nép maga teremtette meg számlálási módszerét és a számukra szükséges műveletek elvégzési rendjét. A nyelvi kifejezésmódok is, a későbből fennmaradt írott emlékek is bizonyítják, hogy különböző írásmódok, különböző számrendszerek alakultak ki. Az amerikai indián törzseknél végzett vizsgálatok megállapították, hogy 307 törzs közül 146 tízes, 106 pedig ötös, húszas vagy huszonötös számrendszert használt. Helyi értékes ötös számrendszert használtak a *maya* indiánok is az időszámításunk kezdete táján.

A földművelés, állattenyésztés, kézművesség, kereskedelem tehát szükségessé tette a dolgok számszerű ellenőrzését és hosszú ideig való nyilvántartását. Így alakultak ki a különböző népeknél a *számjegyek*. A kialakulás idején szinte minden nép más számjegyeket használt.

A mi arab számjegyeket használó helyi értékes *tízes* vagy *dekadikus* számrendszerünk, igaz hogy arab közvetítéssel, de *Indiából* származik. A régi tízes számrendszer és a helyiérték használata itt forrt össze, valószínűleg a III-IV. században.

Matematikatörténeti áttekintés. Az *egyiptomi Rhind-papirusz* tanúsága szerint Egyiptomban az i.e. 2000 körüli időkben már jól kialakult tízes számrendszer volt, melynek kialakulását a mezőgazdaság és a csillagászat szükségletei mozdították elő. Minden magasabb tízes egységre külön jelet használtak, tehát a helyi érték fogalmát még nem ismerték. Egy pálcika: 1. Két pálcika: 2. Három pálcika: 3 és így tovább. Hajtű: 10. Két hajtű: 20, három hajtű 30, egy csavar 100, két csavar 200,

három csavar 300, egy lótuszvirág 1000, két lótuszvirág 2000 és így tovább, millióig. A milliót a csodálkozó, térdeplő emberalak fejezte ki. Az egyiptomi írnokok nádtollal, vékony ecsettel és tintával bonyolult hieroglifákat festettek a papirusztekercsekre, amelyek közül a száraz homok sokat megőrzött, s így fennmaradhettek az utókor számára. Matematikai tartalmú papirusz csak három maradt, de ezekből is sokat megtudhatunk róluk. Számolási tudományuk lényege a négy alapművelet; legfontosabb köztük az összeadás, tudniillik a szorzást és osztást is összeadás segítségével végezték. A törtszámokat is ismerték és a velük való számolás igen érdekes módját alkalmazták. Minden törtet egységsszámológójú törtek összegére bontottak. A felbontásra táblázataik voltak. Ezek a felbontások kivívják csodálatunkat, de a törtekkel ilyen módon való számolás nagyon nehézkes lehetett. Ugyanabban az időben *Mezopotámiában*, a késői sumér korszakban, ahol a csatornázás és építkezés bonyolult számítást kívánt, fejlett helyi értékes hatvanas számrendszert találunk, amely még elárulja az előző tízes számrendszer használatát, hiszen 1-től 60-ig a régebbi tízes számrendszer segítségével írták le a számjegyeket. Ennek emléke a mi óra – perc – másodperc mértékegység – rendszerünk is. Volt szorzótáblájuk, tudtak négyzetre emelni, gyököt vonni. A mi tizedes törtjeinkhez hasonló módon, a hatvanas helyi értékes számrendszerbe illő „hatvanados” törtekkel számoltak. Olyan természetesnek vesszük, hogy a nap 24 órából áll, mintha az istenek írták volna elő – pedig a sumérok találták ki ezt is. Ékirásos jeleiket belevésték az agyagba, a táblát tüzes kemencébe kiégették, ezzel olyan időtállóvá tették, hogy csak meg kell találni a táblát – és megfejteni az ékirás titkát –, az idők végezetéig olvasható marad.

A számolásra utaló legrégebbi *kínai* jelek az i.e. XIV-XI. századból származó – jósláshoz használt – csontokon, valamint az i.e. X-III. századi cserép- vagy bronztárgyakon és pénzekon maradtak fenn, és nem helyiértékes, de tízes számrendszerrel tanúskodnak. Az *ókori görögök* számírása az i.e. V. század tájékán nem helyi értékes tízes számrendszerben történt. Az első 9 számjegyet ábécéjük első 9 betűje, a 9 darab tízest a következő 9 betű és a 9 százast a további 9 betű jelentette. A 999-nél nagyobb számok leírására betű-számjegyek mellett külön jeleket használtak. Ilyen alfabetikus számjegyrást találunk az ósláv, héber és arab népeknél is. Tízes számrendszerre mutatnak a *római* számjegyek is, de kibővítve az 5, 50 és 500 jelével. A rómaiak 7 egyszerű számjelet ismertek:

I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000,

amelyekből valamennyi többi számot elő tudták állítani a következő módon: a számok írásánál az egymás mellé írt egyenlő jegyeket össze kell adni; az egymás mellé írt különböző jegyeknél a kisebb számot a nagyobbhoz kell adni, ha ettől jobbra áll, és levonni belőle, ha balra áll tőle. Például: IX=10-1=9, XI=10+1=11. Mivel a rómaiak nem ismerték a számok helyértékét, nagy számok leírása kényelmetlen, és a számolás reménytelenül nehéz volt.

Az *indiai népek* legnagyobb tudományos és általános kutúrtörténeti vívmánya a helyi érték elvén alapuló tízes számrendszer megteremtése volt, amelynek kiteljesedése hosszú időt vett igénybe, és még távolról sem ismert fejlődésének minden állomása. Az indiai számolási mód már ősidők óta tízes alapú volt, bár egyes időszakokban és egyes vidékeken a négyes alapszám nyomai is megtalálhatók. Megközelítőleg a VI. század közepére tehető az új helyiérték-rendszer keletkezése, amely a következő három tulajdonságot egyesíti: 1. multiplikatív írásmód; 2. a tíz hatványai jeleinek elhagyása. Ez a jelentős tulajdonság már a babiloni és kínai aritmetikában is megvan. 3. A helyiérték-rendszer teljességéhez azonban szükség van még egy, a *nullát* jelző számjegyre, amely megmutatja, hogy a megfelelő helyen nem szerepel a tíz megfelelő hatványa.

Az *ősmagyarok*, mint a nyelvészeti kutatások igazolják, a történelmi időkben már tízes számrendszert használtak. Ez azonban az előző idők hatos és hetes számrendszerén át, hosszú fejlődés eredménye volt. A hetes számrendszerre lehet következtetni például a mesék hétfejű sárkányáról, a hetedhét országról, a hét sing hosszú szakállról, a hétmérföldes csizmáról, a hétpecsétetes titokról, a hétszerte szebb letről, stb. A később keletkezett nyolc és kilenc számneveinkben a szóvégi c, régiesen írva z, valószínűleg a tíz számnév végződése. Ebből úgy sejtjük, hogy a nyolcat és a kilencet a tízből származtatták ősünk. A nyelvészeti kutatások szerint a finnugor nyelvekben közös gyökere van a két, három, négy, öt, hat és száz tőszámneveknek. Ezek kialakulásakor még a finnugor népek együtt voltak és hatos számrendszert használtak. A *hét* számnév már a szűkebb ugor családra utal (magyar, vogul, osztják). E népek nyelvében a hét szó nemcsak számnév, hanem jelenti a hétnapos időtartamot is. Az ősi rovásírás számjegyei és írásmódja már tízes számrendszert mutatnak. Az ősi hagyományokat őrző pásztorrovás leleteink csak a XII. századig nyúlnak vissza, de a nyelvészek megállapítása szerint a honfoglaló magyarság ezt az írást az őshazából hozta magával.

Ma Magyarországon, és Európa nagy részén arab számokat használunk, és tízes számrendszerben számolunk. De a történelem ennél többféle számrendszert és különböző írásmódokat ismer. Ismerkedjünk meg ezekkel!

Babilon számai és rendszerük

Az Eufrátész partján elterülő, egykori mezopotámiai város, Babilon volt az egyiptomi matematika forrása. Neve azt jelenti, Isten kapuja, vagyis ez lehetett a bibliai Babel. I.e. 1100-as évektől élte fénykorát I. Nabukodonozor király hódításainak köszönhetően. A várost támadták az asszírok, de a nehéz éveket újabb felvirágzás követte: ha hihetünk Hérodotosz leírásainak, akkor ebből az időszakból valók a függőkertek, a világ hét csodáinak egyike.

A babiloniak és sumérok társadalmi, kereskedelmi és vallási életéről, tudásáról az általuk hátrahagyott táblákból következtethetünk. Az általuk használt írás 60-as alapú, helyiértékes számrendszert használt. Ugyanezt alkalmazzuk napjainkban is az idő- és szögmérésre. (A nap 24 órára osztása is mezopotámiai örökség.) Ez a fajta számrendszer megkönnyíti az osztás műveletét, hiszen a 60 számos osztóval rendelkezik, és így egyszerűbb a törtekkel való számolás.)

Az egység és a 60 jelölésére ugyanaz a szimbólum szolgált: ∇ , a 10: \triangleleft . A 60 hatványai között vagy helyet hagytak ki, vagy egy $\text{\textcircled{\scriptsize E}}$ jelet tettek. A szövegkörnyezetnek minden tévedést ki kellett küszöbölnie, és egyértelművé tenni a számot, mivel nem ismerték a nulla fogalmát.

5112 átírása pl. a következő: $\nabla \triangleleft \triangleleft \triangleleft \nabla \triangleleft \nabla$
 ,azaz $1 \times 60^2 + (10+10+5) \times 60^1 + (10+2) \times 60^0$

A következő táblázatban megtalálhatóak 1-59-ig a számok:

Egyiptomi számok és rendszerük

Már az ókori egyiptomi emberek életében is fontos szerepe volt a számoknak, a számolásnak.

A birodalomban hatalmas építményeket emeltek, gondos számítások alapján; beszédtek az adókat és látványos ünnepségeket szerveztek, mindezekhez precíz költségvetést kellett tervezni.

Nézzük meg, milyen számrendszerben gondolkoztak a korabeli írni-számolni tudók!

Az ókori egyiptomi additív számrendszer nem ismerte a nulla fogalmát, így nem is jelölték. A kívánt szám a leírt ún. piktogrammok (kis hieroglifák) összegéből állt elő. például a 324 a következőképpen nézett ki:

IIIIIOO999
 (azaz 4 egység, 2 tízes, 3 százaz)

Az írnokok másfajta, ún. kurzív írást használtak, ami különbözött a hieroglifáktól. Ez utóbbiakat találjuk az épületeken és freskókon, az előbbiek pedig a papirusztekercsekre kerültek.

Az additív rendszer azonban hamar használhatatlanná vált, amikor igazán nagy vagy nem egész számokat kellett jegyezni.

Ennek megoldására kezdték használni az elemi törteket, amelyekben a számláló mindig egy volt.

Az alaptörteknek, mint az $1/2$, $1/3$, $1/4$... stb. külön jeleik voltak. A nevezőt egy oválissal és alatta levő kis vonalakkal jelölték. Itt látható hieroglif és a hieratikus írásmódja:

Kizárták a kettőzést, vagyis olyat mint pl. $1/3+1/3$ nem lehetett használni, mégis minden törtet fel tudtak írni az elemi törtek segítségével:

$$2/3 = 1/2 + 1/6 \quad ,\text{amiből következnek: } 2/3n = 1/2n + 1/6n \quad (*)$$

$$2/5 = 1/3 + 1/15 \quad ,\text{amiből következnek: } 2/5n = 1/3n + 1/15n \quad (**)$$

$$2/7 = 1/28 + 1/4$$

$$2/11 = 1/6 + 1/66$$

$$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$$

$$3/4 = 1/2 + 1/4$$

$$3/7 = 1/7 + 2/7 = 1/7 + 1/4 + 1/28$$

$$4/5 = 2/5 + 2/5 = 2/3 + 2/15 = 1/2 + 1/6 + 2/15$$

$$4/5 = 1/2 + 1/6 + 1/10 + 1/30 \quad (*)$$

$$4/5 = 1/2 + 1/6 + 1/9 + 1/45$$

Indiai számok és rendszerük

A mi tízes számrendszerünk a 0, 1, 2, ... 9 számjegyeket használja. Arab számoknak nevezzük őket, de valójában indiai eredetűek.

India történetét leginkább csak az ie. 6. századtól ismerjük, a Dáriusz vezette perzsa háborúk korától, amelyet Homérosz mesélt el. A perzsák után Nagy Sándor hódította meg a területet. Halála után született meg az első igazán nagy dinasztia: a Mauraya. A későbbi muzulmán megszállás eredményeként jött létre a ma is ismert indo-muzulmán kultúra, ahol két vallás, az iszlám és a hinduizmus egyszerre van jelen.

Indiában matematikával többnyire csak a vallási személyek foglalkoztak. Az 5. század matematikusai, mint Ariabhata vagy Bhaskara, gondolkodásmódja független volt a görögökétől. Tízest alapú, helyiértékes számrendszerben számoltak: a számjegy helye a szám leírt alakjában a 10 valamely hatványát jelöli, a számjegy pedig azt, hogy hányszor van meg a számban a 10-nek ezen hatványa.

Brahmaguptához kötjük az egy kis körrel jelölt számjegy, a nulla feltalálását és használatát a számok írásmódjában. A 0 a tíz valamely hatványának a hiányát jelöli. Ez jutott el később a nyugati világba a spanyol Andalúzia arab megszállását követően.

Arab számok és rendszerük

Az általunk, nyugati emberek által használt számjegyeket arabnak hívjuk. Valójában azonban az arab számok nem ilyenek, hanem:

Az eredetileg indiai számjegyeknek mégis sok közülük van az arabokhoz. Ők juttatták el Európába a spanyol Andalúzia megszállásával. Elterjesztésében fontos szerepet játszott még Gerbert d' Aurillac pápa a 9. század végén.

Az átvett arab számok alakja azután folyamatosan változott, a középkorban például ilyen formában használták:

Az arab matematika a görög és a római civilizáció hanyatlásával indult fejlődésnek. Ekkor jelent meg, 600 körül Mohamed próféta, és az új vallás, az iszlám új távlatokat nyitott Arábia nomád népei előtt. A szellemi és gazdasági felvirágzás a próféta szülővárosában, Mekkában kezdődött. Mohamed halála (632) után folytatódott Szíria, Jeruzsálem, Mezopotámia, Irán, Egyiptom, Ciprus, Észak-Afrika és Szicília földjén át Spanyolországig. Az arabok előretörését Martel Károly, francia herceg serege állította meg Poitiers-nél 732-ben.

Bagdad volt a legfőbb központ. 832-ben Al Mamhun kalifa megalapította a Tudás Házát (Bait al Hikma). Itt a hadjáratok során összegyűjtött tudományos (csillagászati, matematikai, orvosi) szövegeket fordították és tanulmányozták. Legmélyebben a hindu algebrával és a görögök számtan-mértanával foglalkoztak, így a legnagyobb újítók az algebrában és a trigonometriában voltak.

Számrendszerüket az indiai matematikából vették át, így ők is tízes alapú, helyiértékes rendszert használtak.

Számjegyeiket a lap tetején lehet megnézni.

A sok nyelvben megtalálható zéró szó (olaszul, angolul zero, franciában zéro...) az arab "szifir" módosulása, és nullát jelent. Tehát nem csak a számok alakját, hanem egynek még az elnevezését is az araboktól kaptuk.

Görög számok és rendszerük

Az ókori görög világ kiemelkedő helyszíne kétségkívül Athén. Nevét Athénéről, a művészetek és tudományok istennőjéről kapta. Legfényesebben Periklész idejében ragyogott, de még egészen a rómaiak hatalmáig nagy szerepe volt.

A görögöktől származik a geometria szó (geo=föld + metria=mérés), az aritmetika elnevezés (arithmosz= számokkal kapcsolatos). Foglalkoztak a törtszámítással, főként az arányok kapcsán; tökéletesítették az első csillagászati eszközöket: napórát használtak az idő mérésére, és ki tudták számítani a horizont és a csillagok távolságát.

A görögök 10-es alapú, additív számrendszerben számoltak, a szimbólumok az ábécé betűi és különböző kiegészítő jelek voltak. Jól kellett ismerni a rendszer elemeit ahhoz, hogy felismerjék a számot.

pl. 12 ókori görög alakja ιβ, azaz 10 (ι) és 2 (β), ami 10+2 jelent

Néhány számnak különleges jelölése volt, például a 900-nak. Hogy meg tudják különböztetni a szót a számtól, az utóbbi fölé vonalat húztak.

Egyszerűsítette a nagy számok írását, hogy egy vesszővel jelölhették az 1000szoros szorzást:

$$\beta = 2000$$

Az elemi törtet a szám jobb oldalára tett felső vesszővel jelölték:

$$\beta' = 1/2$$

A számoláshoz abakuszt használtak (a görög *abax* jelentése táblácska). A rovátkolt tábla, amelyen kis korongokat csúsztattak, őse volt a kínai számolóeszköznek.

Római számok és rendszerük

Róma nevét alapítójáról, Romulusról kapta ie. 753-ban. Két és fél évszázaddal később megdőlt az etruszk királyság a félszigeten, és létrejött a római köztársaság. A rómaiak hamar benépesítették a későbbi Itália földjét. A 2. században terjeszkedni kezdett Görögország és Észak-Afrika felé, és ie. 27-ben megszületett a Római Birodalom Augustus császárral az élén.

Rómától keletre isz. 330-ban létrejött Konstantinápoly az egykor görögök alapította Bizánc helyén. Ide menekültek a Róma által üldözött keresztények, és ebben a városban alakul ki az ortodox vallás.

A római számok rendszere különleges volt, és egyáltalán nem alkalmazkodott még a legelemibb számításokhoz sem. Tízese számrendszer, amelynek fő szimbólumai az I, X, C és M (1, 10, 100, 1000), másodlagos szimbólumai a V, L, D (az 5 többszöröse).

Additív számrendszert használtak, a szám értékét a jelek összevonásával kapták meg.

pl.: 9 római alakja IX, azaz 10-1

24 római alakja XXIV, azaz 10+10+5-1

1995 római alakja MCMXCV, azaz 1000+1000-100+100-10+5

Az MCMVC vagy az MCMLXXXV forma tiltott volt. A számjegyeknek csökkenő sorrendben kellett következniük balról jobbra. Ezért nem tekinthető 1100-nak az MCMXCV alak első két jegye, hiszen a százás után ezres áll, ami azt jelenti 900. A nagyon nagy számok felírásánál segített az egyszeres felülvonás, amely az 1000szoros szorzást jelentette, valamint a kétszeres felülvonás az 1000000szoros szorzás jelzésére.