TÉTEL: Bármely 0-adrendű logikai formula konjunktív normálformává alakítható.

BIZ.: 1. lépés: Akkor, és csak akkor eltüntetése ($\Leftrightarrow$)

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

2. lépés: Implikáció eltüntetése

$$A \Rightarrow B = \neg A \cup B$$

3. lépés: Dupla negáció eltüntetése

$\neg\neg A = A$ (mert a dupla tagadás nem fér bele a literál fogalmába)

4. lépés: $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

5. lépés: Tagadás bekúszása a zárójelbe.

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\} \text{disztributív}$$

Prenex alak: $\forall$ kvantort kiviszzük a zárójel elé, és a kvantorok után a formula konjuktív normálformában van, és az összes kvantor univerzális.

(Egy elsőrendű logikai formula akkor van prenex alakban.)

TÉTEL: Bármely elsőrendű logikai kifejezés prenex formára hozható.

A prolog programokból prenex alakot készítünk

ose (x,y) :- gy (y,x)

$$\forall_x \forall_y \text{ ose}(x,y) \Leftarrow gy(y,x) \equiv \forall_x \forall_y (gy(y,x) \Rightarrow \text{ose}(x,y)) \equiv$$

$$\equiv \forall_x \forall_y (\neg gy(y,x) \cup \text{ose}(x,y))$$

ose (x,y) :- gy(y,z) , ose (x,z)

$$\neg \exists_x P(x) \equiv \forall_x \neg P(x)$$

$$\neg \forall_x P(x) \equiv \exists_x \neg P(x)$$

$$\forall_x \forall_y (\text{öse}(x,y) \Leftarrow \exists_z (gy(y,z) \wedge \text{öse}(x,z)))$$

$$\forall_x \forall_y (\exists_z (gy(y,z) \wedge \text{öse}(x,z)) \Rightarrow \text{öse}(x,y)) \equiv$$

$$\equiv \forall_x \forall_y (\neg \exists_z (gy(y,z) \wedge \text{öse}(x,z)) \vee \text{öse}(x,y)) \equiv$$

$$\equiv \forall_x \forall_y (\forall_z \neg (gy(y,z) \wedge \text{öse}(x,y)) \vee \text{öse}(x,y)) \equiv$$

$$\equiv \forall_x \forall_y \forall_z (\neg gy(y,z) \vee \neg \text{öse}(x,z) \vee \text{öse}(x,y))$$

A Goal részt is át kell alakítani.

öse (x, dávid)

A célban minden változó egzisztenciális kvantorral kell, hogy szerepeljen.

$\exists_x$ öse (x, dávid)   És akkor igaz, ha a tudásbázisból a cél logikailag következik.

$(\cup) \wedge (\cup) \Rightarrow \exists$ öse (x, dávid)

$(\cup) \wedge (\cup) \vee \exists_x$ öse (x, dávid)

$(\cup) \wedge (\cup) \wedge \neg \exists_x$ öse (x, dávid)

Példa:

Domains

Predicates

e(symbol);

h(symbol);

Clauses

$e(\text{socrates}).\quad \equiv e(s)$

$h(x) :- e(x) \quad \equiv \forall_x\, e(x) \Rightarrow h(x) \equiv \forall_x\, \neg e(x) \vee h(x)$

$h(s)$

$e(s) \wedge \forall_x\, (\neg e(x) \vee h(x)) \Rightarrow h(s)$

$\forall_x\, (e(s) \wedge (\neg e(x) \vee h(x)) \Rightarrow h(s)$

$\forall_x\, (e(s) \wedge (\neg e(x) \vee h(x))) \wedge \neg h(s)$

$\forall_x\, (e(s) \wedge (\neg e(x) \vee h(x)) \wedge \neg h(s))$

3. előadás

IX. 27.

prolog $\Rightarrow$ (predikátum kalkulus) prenex alakú log. formula.

prenex alak: $\forall$ kvantor univerzális, a kvantorok után konjuktív normálforma van.

$\forall \ldots \forall \quad (KNF)$

$$\underbrace{(A \cup \neg B \cup \neg C)}_{\neg B = \overline{B}} \wedge \underbrace{(A \cup C \cup \neg D)}_{} \wedge \ldots \wedge (\ldots)$$

clause

Clause: literálok diszjunkciója.

<u>Rezolúció:</u>

$(A \cup B \cup C) \quad (\bar{A} \cup B \cup D)$

rezolúció

rezolvens $(B \cup C \cup D)$

Elhagyom az ellentétes literálpárt, a maradékot leírom.

Jele:

$\text{rez}(A \cup B \cup C,\ \bar{A} \cup B \cup D) = B \cup C \cup D$

Tétel: $(A \cup B \cup C) \wedge (\bar{A} \cup B \cup D) \Rightarrow (B \cup C \cup D)$

Általánosan: * $(A \cup B) \wedge (\bar{A} \cup C) \Rightarrow (B \cup C)$, ahol B és C clause.

11.

Biz.: (1) A = igaz (1.1) C = igaz, akkor B ∪ C igaz, így * igaz

(1.2) C = hamis, akkor * igaz.

(2) A = hamis (2.1) B = igaz, akkor B ∪ C igaz, így * igaz.

(2.2) B = hamis, akkor * igaz.

Feladat: $(A \cup B) \wedge (\bar{A} \cup C) \Rightarrow (B \cup C)$

Biz.:

(1) A igaz (1.1) C = igaz ⇒ B ∪ C = igaz, * igaz

(1.2) C = hamis, akkor * igaz

(2) A hamis (2.1) B = igaz

(2.2)

Rezolúció: 2 clause rezolválható, ha pontosan egy olyan literál van, amely az egyik clause-ban pozitív, a másik clause-ban negatív, akkor literáljaik diszjunkciója elhagyva azt a literált, ami az egyikben poz., a másikban negatív. Ez a metódus a rezolúció.

$(b \vee \bar{b})$: tautológia, mindig igaz. Akkor alkalmazható a rezolúció, ha nem vezet tautológiához.

$(b) \wedge (\bar{b}) \Rightarrow \square$ üres clause = hamis.

Rezolúciós metódus: eredménye egy clause set.

Ha a clause set-ben van 2 olyan clause, amelyeket még nem rezolváltunk, akkor rezolváljuk őket és a rezolvenst hozzávesszük a clause set-hez. Ha a rezolvens üres clause, akkor kilépés igazra, ha nem lehetséges több rezolúció, akkor kilépés hamisra.

Tétel: A rezolúciós metódus segítségével eldönthető, hogy egy KNF-ban levő formula kielégíthető-e vagy sem.

Def.: A formula kielégíthető, ha létezik olyan interpretáció (értékhozzárendelés a változókhoz), amely mellett a formula igaz.

kielégíthető: SATISFIABLE

Nem kielégíthető: UNSATISFIABLE

Azt a problémát, ami a logikai formulák kielégíthetőségét vizsgálja, az a SAT probléma. Egy clause set egy SAT probléma egy példánya.

Egy rezolúciós metódus akkor mondja, hogy igen, ha levezethető az üres clause.

Tétel: (előző átfogalmazása) Ha egy clause setből rezolúció segítségével levezethető az üres clause, akkor ez a clause set kielégíthetetlen.

Biz.: Mivel a rezolvens logikai következménye a rezolúció 2 paraméterének és a clause set-ből rezolúció segítségével levezethető az üres clause, ezért az üres clause logikai következménye a clause setnek, mivel az üres clause hamis, így a clause set-ből levezethető a hamis, így a clause set ellentmondásos, azaz kielégíthetetlen.

A tétel és a tétel átfogalmazása nem ugyanaz, mert végtelen ciklusba is kerülhet.

Tétel: A rezolúciós metódus nulladrendű nyelvek esetén biztosan megáll.

B.

BIZ: teljes indukció

Def.: Azt mondjuk, hogy egy clause Horn clause, ha max. egy pozitív literál van benne.

Poz. literál: nincs negálva

Neg. literál: negálva van.

Példa:

nagyapja (x, y) :- apja (z, y), apja (x, z)

$N(x,y) \Leftarrow (A(z,y) \wedge A(x,z))$

$A(z,y) \wedge A(x,z) \Rightarrow N(x,y)$

$\neg(A(z,y) \wedge A(x,z)) \vee N(x,y)$

$\neg A(z,y) \vee \neg A(x,z) \vee N(x,y)$

Minden prolog programbeli clause-nak egy Horn-clause felel meg, ugyanúgy a célnak is Horn clause felel meg.

Tétel: A rezolúciós metódus megáll, ha az inputja egy 0-adrendű Horn-clause set.

Tétel: Ha a rezolúció inputja 2 Horn clause, akkor az outputja is Horn clause.

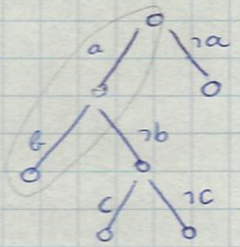
BIZ.: 1) A clause set kielégíthetetlen, akkor biztos van benne olyan clause, ami csak negatív literálokat tartalmaz.

Indukció bázisa: a csupa negatív literálból álló clause hossza 1.

Általánosság elvesztése nélkül ez a clause legyen a $\neg A$.

- rezolúció módszerének bizonyításához indukciót kell használni

adatszerkezet: szemantika - fa



a fában az élekhez literálokat rendelünk
változó v. annak
a negáltja

Teljesíteni kell:

1) minden csomópontból csak véges él indul ki

2) Bármely úton haladva nincs olyan, hogy az úton két ellentétes literál van. (két ellentétes literálpár nem csatlakozik az élhez)

Ha mindkettő teljesül, azt mondjuk, hogy a fa SZEMANTIKA-FA.

D: A szemantika - fa TELJES ⟺, ha ∀ utat bejárva az út minden változót tartalmaz, vagy annak a negáltját.
(A fenti fa nem teljes. O-részben nincs c.)

Szemantika - fa jelentése:

Valamely élen továbbhaladva az élhez kapcsolt literált igaznak tételezem föl.

Ellentmondás csomópont

A csomópont akkor ellentmondás csomópont, ha a csomóponthoz tartozó literál megjelenik a clause setben, ha van olyan clause, amely kizár ezt a literált tartalmazza negáltan. Ekkor az a feltételezés, hogy a literált igaz, hamissá teszi a clause set-et, ezért azt mondjuk, hogy az eredmény csomópont ellentmondás csomópont.

$$(a) \wedge (\neg a \vee \neg b)$$

$\neg a$

ez a feltételezés nem igaz $\Rightarrow$ a-nak igaznak kell lenni

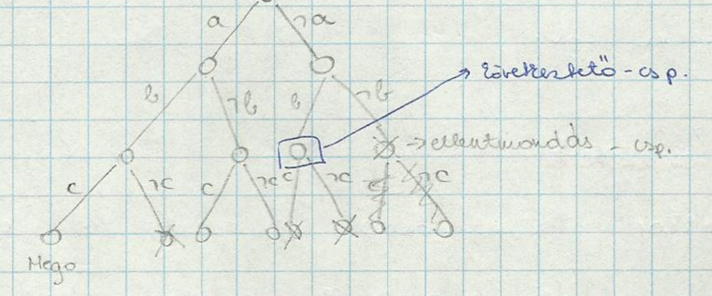
Ellentmondás csomópont:

A csomópont ellentmondás-csomópont akkor, ha a gyökértől kiindulva ezen csúcsig a feltételezések összessége hamissá teszi a clause set-et. Ennek a csúcsnak az őseire és a tulajdonság nem igaz.

Következtető-csomópont:

Azt mondjuk, hogy a szemantika-fa ZÁRT $\Leftrightarrow$, ha minden ága ellentmondás-csomópontban végződik.

(Ha a már felrajzolt fát kiegészítenénk teljessé $\Rightarrow$ 8 levél-elemű lenne. $\Rightarrow$ 8-féle kiértékelés.)



pl.: $\underbrace{(a \vee b)}_{\neg a,\, \neg b \text{ esetén ez a clause hamis}} \wedge (\neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$

Ez a fa nem zárt.