Trigonometrikus fgvek.

Def.: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ fgv-t szinuszfüggvénynek nevezzük.

Mj.: (1) Cauchy–Hadamard tételből következik, h. a hatványsor minden valós x esetén konvergens.

(2) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

A sin fgv: páratlan

Def.: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ fgv-t cosinus fgvnek nevezzük.

Mj.: $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

A cosin fgv: páros

A bizonyítások nélkül a sin és cos fgv jellemzését TUDNI ATK-ból!!!

Tétel: A sin fgv páratlan, a cos fgv páros.

Biz.: triviális

Mj.: addíciós tételek → jegyzetben! (TK)

↳ biz nem kell.

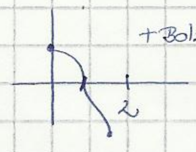
↓

A sorok Cauchy-szorzatával történik

Tétel: A koszinusz fgv-nek $\exists$ zérushelye $(0;2]$ intervallumban.

máj. ~~21~~ / 26
június 2/23

Biz.: $\cos 0 = 1$



+Bolzano-t ⇒ áll

$$\underbrace{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}}-\underbrace{\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}}-\dots =$$

$$= 1-\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{x^2}{3\cdot 4}\right)-\frac{x^6}{6!}\left(1+\frac{x^2}{7\cdot 8}\right)-\dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}\left(1-\frac{x^2}{(4k-1)4k}\right) < 1-\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{x^2}{3\cdot 4}\right) <$$

majorálás miatt

$$< 1-\frac{2^2}{2!}\left(1-\frac{2^2}{3\cdot 4}\right) = 1-\frac{4}{3} = \underline{-\frac{1}{3}} \to$$

Azt kaptuk, hogy a jobb oldali végpontban ($x=2$) negatív, a bal oldalon pozitív ⇒ a Bolzano tétel miatt ∃ zérushely.

Probléma: Tudjuk, h. van zérushely, de keressük az infimumot.
(ez nem biztos, h. az intervallumban van.)

Tétel: Ha az f fgv folytonos ⇒ a zérushelyeinek halmaza zárt.

Biz: indirekt úton bizonyítható

Mj.: Mivel a cos fgv folytonos (mivel hatványfgv), ezért a zérushelyeinek halmaza zárt halmaz, $\exists\, x_0 := \inf\{x \mid f(x)=0 \wedge x\in(0,2]\}$

$0 < x_0$

Def.: A cos fgv. legkisebb pozitív zérushelyének kétszeresét $\underline{\underline{\pi}}$-vel jelöljük.

TK: cos és sin fgv-ek tulajdonságaikat tudni → tétel biz nem kell.
Hogy vezetjük be? (π)
tg és ctg fgv-ekről minden Hf.

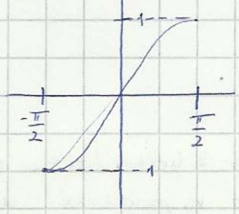
anal EA.

Déf.: A sin fgv $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$-ra való leszűkítésének inverzét <u>arcsin</u> fgv-nek nevezzük.

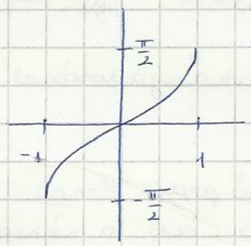
jel.: arcsin

(A sin fgv nem invertálható!)

Mj.:



sin fgv



arc sin
(nem periódikus)

Pl.:

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{, mert} \quad \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\sin} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xleftarrow{\text{arc sin}}$$

(Mj: Hiperbolikus fgv-eket nem kellenek!!!)

Nevezetes határértékek:

Tétel: (1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Tétel: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, és a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, továbbá $a_n > 0$ és $a > 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

Pl.: $\underbrace{\left(2+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow\, 2}^{\overset{\nearrow 2}{\frac{2n+1}{n}}} \rightarrow 2^2$ $\qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow$ itt a tétel nem használható.

Biz.:

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n} = \left(\left(e^{\log a_n}\right)^{b_n}\right) \longrightarrow \underset{\downarrow}{e^{b \log a}} = a^b$$

azért, mert exp(x) folytonos

VIII. tétel

Differenciálszámítás

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $\quad f: H \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in H$

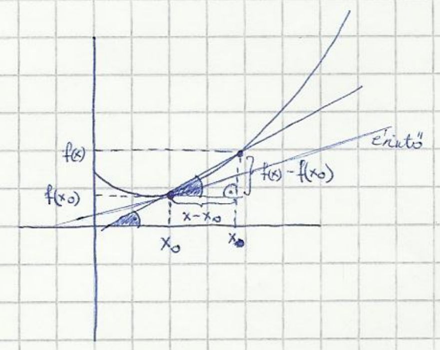
$\varphi: H \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ fgv-t az f fgv x_0-beli

differenciahányadosának nevezzük.

Ha x_0 belső pontja H-nak és a f fgv-nek ∃ határértéke az x_0 pontban, akkor ezt a számot az f fgv x_0 pontbeli differenciálhányadosának nevezzük. Jel.: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$ $\quad A = f'(x_0) = f^{(1)}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$

Mj.: Mivel a diffhányadost határértékkel értelmeztük, jobb- és baloldali határértéket véve jobb- és baloldali diffhányadoshoz jutunk.

jele: $f'_+(x_0)$; $f'_-(x_0)$



$y - y_0 = m(x - x_0)$

$m = \operatorname{tg} \alpha$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

A szelő meredekség határértéke megegyezik az érintő meredekségével, ami az x_0 pontbeli diff.hányados.

Pl.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad P(\underset{x_0}{2}; \underset{y_0}{4})$

$y - 4 = m(x-2)$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \underline{4} = m = f'(2)$

$y-4 = 4(x-2)$ → az érintő egyenes egyenlete

$y = 4x - 4$

10. előadás

Tétel: (lineáris approximáció - lineárisan közelít)

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak.

Az f fgv differenciálható az x_0 pontban $\Leftrightarrow$, ha $\exists\, A \in \mathbb{R}$, $\omega: H \to \mathbb{R}$ úgy, hogy ω folytonos x_0-ban, $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x_0) = 0$, $f(x) - f(x_0) = (A + \omega(x))(x - x_0)$, ahol $A = f'(x_0)$, ω és A egyértelműen meghatározott.

Biz.: (1) Tfh. f differenciálható az x_0 pontban

$$\omega: H \to \mathbb{R} \qquad \omega(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A, & \text{ha } x \neq x_0 \\ 0, & \text{ha } x = x_0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right) = 0 \rightarrow \omega(x)(x - x_0) + A(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$$

differenciahányados, ami tart a deriválthányadoshoz

tart A-hoz.

és $\omega(x_0) = 0 \Rightarrow \omega$ az x_0 pontban folytonos.

(2.) A, ω egyértelmű
indirekt. Tfh.: $A_1, A_2, \omega_1, \omega_2$ -re igaz

$$f(x) - f(x_0) = (A_1 + \omega_1(x))(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) = (A_2 + \omega_2(x))(x - x_0)$$

$$(A_1 + \omega_1(x))(x - x_0) = (A_2 + \omega_2(x))(x - x_0)$$

$$x \neq x_0$$

$$A_1 + \omega_1(x) = A_2 + \omega_2(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (A_1 + \underbrace{\omega_1(x)}_{0}) = \lim_{x \to x_0} (A_2 + \underbrace{\omega_2(x)}_{0})$$

$$A_1 = A_2$$

$$\omega_1(x) = \omega_2(x)$$

$$f(x) - f(x_0) = (A + \omega(x))(x - x_0) \qquad x \neq x_0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \omega(x)$$

11

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(A + \omega(x)\right) = A$$

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ fgv, x_0 belső pontja H-nak. Ha az f fgv differenciálható x_0-ban $\Rightarrow f$ folytonos x_0-ban

Biz.: Ha f differenciálható $\Rightarrow$ lin. approximálható $\exists$ $A \in \mathbb{R}$, $\omega: H \to \mathbb{R}$ fgv. $f(x) - f(x_0) = (A + \omega(x))(x - x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{(A + \omega(x))}_{\downarrow\, 0} \underbrace{(x - x_0)}_{\downarrow\, 0} = 0$$

$x \to x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0)$ + átviteli elv. $\to$ TÉTEL

Mj: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$ $x_0 = 0$ x_0-ban folytonos, de NEM differenciálható.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1$$

$\hookrightarrow$ jobbról tartson a 0-hoz.

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1$$

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f, g: H \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak.

Ha f és g differenciálható x_0-ban, és $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g$, fg, $\frac{f}{g}$ $(0 \notin R_g)$ is differenciálható x_0-ban.

1., $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$

2., $(fg)'(x) = f'(x_0)\, g(x) + f(x_0)\, g'(x_0)$

3., $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Biz.: (2)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) + f(x)g(x_0) - f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\left(g(x)-g(x_0)\right) + g(x_0)\left(f(x)-f(x_0)\right)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(x)\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) + g(x_0)\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) =$$

$g'(x_0)$ $\qquad$ $f'(x_0)$

f fgv diff-ható $\Rightarrow$ f folytonos

$$= f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0)$$

Tétel: Legyen H_1 és $H_2 \subset \mathbb{R}$, $f: H_1 \to \mathbb{R}$, $g: H_2 \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H_1-nek és $f(x_0)$ belső pontja H_2-nek.

Ha f differenciálható az x_0 pontban és g differenciálható $f(x_0)$-ban, $\Rightarrow$ a $g\circ f$ fgv is differenciálható x_0-ban és $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Biz: Hf! (2x kell alkalmazni a lin. appr. tulajdonságot!)

Mj.:

$$(\sin x^2)' = (\sin' x^2)(x^2)' = (\cos x^2)\cdot 2x$$

belsőfgv: x^2

külső: sin.

Tétel: (Inverz fgv differenciálhatósága)

Legyen $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ invertálható és folytonos, $x_0 \in \langle a, b\rangle$ és $y_0 = f(x_0)$

Ha f differenciálható az x_0 pontban és $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ differenciálható az y_0 pontban és $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

inverzfgv helyen

Biz: NEM KELL!

Def.: (1) Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f: H \to \mathbb{R}$

Akkor mondjuk, h. f differenciálható fgv, ha H minden pontjában differenciálható.

(2) Legyen $H_1 \subset H$ és $H_1 := \{x \mid x \in H \wedge f \text{ differenciálható az } x \text{ pontban}\}$

$g: H_1 \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = f'(x)$ differenciálhányados fgv-nek nevezzük.

IX. tétel Elemi függvények differenciálhányadosai

Exp. fgv:

Tétel: Az exp. fgv-nek ∃ differenciálhányados fgv-e és az önmaga.

Biz.:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x_0}\left(e^{x-x_0}-1\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}e^{x_0}\underbrace{\frac{e^{\overset{\to 0}{x-x_0}}-1}{x-x_0}}_{\to 1}=e^{x_0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Log fgv:

Tétel: A logaritmus fgv minden $x\in\mathbb{R}_+$ esetén differenciálható, és a log fgv deriváltja $(\log' x)=\frac{1}{x}$

(ha elvárt írjuk a $'$-t, akkor az a log fgv x helyen vett értékének a deriváltja)

Biz.: $\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ exp f, log f^{-1}

$$(\log' x)=\frac{1}{\exp(\log x)}=\frac{1}{x}$$

11. előadás

Tétel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \exp_a x$ fgv differenciálható és a deriváltja: $f'(x) = (\exp_a x) \log a$

Mj: $(a^x)' = a^x \log a = a^x \ln a$

Biz.: $a^x = e^{x \log a}$ $\qquad (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$

$(e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot \log a = \underline{a^x \log a}$

$(x \log a)' = ((\log a) x)' = \log a \cdot 1 \to x$ deriváltja

$(cf)' = cf'$

Tétel: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = \log_a x$ differenciálható, és

$f'(x) = \frac{1}{x \log a} = \frac{1}{x \ln a}$

Biz.: Hf.

Tétel: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^a$ $a \in \mathbb{R}$

A fgv differenciálható és $f'(x) = a x^{a-1}$

Mj: $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-4}$

Biz.: $(x^a)' = (e^{a \log x})' = e^{a \lg x} a \frac{1}{x} = x^{a} \cdot a \cdot \cancel{\frac{1}{x}} = a x^{a-1}$

Mj: $(x^x)' = ((e^{\ln x})^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} (x' \ln x + x \frac{1}{x}) =$

$= x^x (\ln x + 1)$

Tétel: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\sin x$ fgv. differenciálható és $f'(x)=\cos x$

Biz:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=$$

$$\left\{\left\langle \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right\rangle\right\}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\underbrace{\frac{x-x_0}{2}}_{\to 1}}\cos\frac{\overset{2x_0}{x+x_0}}{2}=\cos x_0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$\downarrow$

x_0

Mivel a cos fgv folytonos, és folyt fgv határértéke egyenlő a helyettesítési értékkel.

Tétel: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\cos x$ fgv. diff-ható és $f'(x)=-\sin x$

Biz: Hf!

Tétel: $f:[-1;1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\arcsin x$ fgv diff-ható, és

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Biz:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}$$

$\downarrow$

eredeti fgv deriváltja az inverzfgv helyen

használtuk: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Tétel: $f:[-1;1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\arccos x$ fgv is deriválható és

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Biz: Hf!