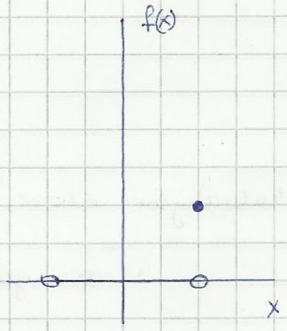
Pl.:

$f_n : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ $\qquad f_n(x) = x^n$

$f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (-1, 1) \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$



$\Rightarrow$ $\langle f_n \rangle$ nem egyenletesen konvergens $\Rightarrow$ FONTOS

(mivel minden pontban folytonos, a hat fgv nem folytonos $\Rightarrow$)

Biz: Hf.

Mj.: Hasonló állítás érvényes fgvsorokra is.

VI. tétel.

Hatványsorok:

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$; $a, a_0, a_n \in \mathbb{R}$, $f_n : H \to \mathbb{R}$, ahol $f_n(x) = a_n (x-a)^n$

$f_0(x) = a_0$

ekkor $\sum_0^\infty f_n(x)$ fgvsort hatványsornak nevezzük, és $\sum_0^\infty a_n (x-a)^n$ módon jelöljük.

Mj.: $x - a = t$

$\sum_0^\infty a_n t^n \to \boxed{\sum_0^\infty a_n x^n}$

Pl.: $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} =$ (hatványsor) $= \sum \underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n} x^n$

9

Tétel: (CAUCHY - HADAMARD TÉTEL)

Legyen $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ egy adott hatványsor és legyen $\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, ha

(1) $\alpha = 0 \Rightarrow$ a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens.

(2) $0 < \alpha < +\infty \Rightarrow \rho := \frac{1}{\alpha}$

akkor $|x| < \rho \Rightarrow$ a hatványsor abszolút konvergens.

$|x| > \rho \Rightarrow$ — " — divergens.

anal.

(3) $\alpha = +\infty \Rightarrow$ a hatványsor az $x = 0$ pontban konvergens

III.25

7. előadás

Biz.: Cauchy-féle konvergenciakritérium segítségével:

Legyen $x \in \mathbb{R}$ rögzített

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = |x|\, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$|x| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow$ a sor konvergens

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho \qquad \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0, \neq +\infty$$

$\rho = \frac{1}{\alpha}$ $\quad |x| < \rho \Rightarrow$ a sor abszolút konvergens

Ha $|x| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow$ a sor divergens

$$|x| > \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho \Rightarrow \text{a sor divergens}$$

ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ $\quad |x| \cdot 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ akkor a sor csak az $x = 0$ pontban konvergens

Mj.: (1) $\frac{1}{\alpha} = \varrho$ -t konvergenciasugárnak nevezzük

$0 < \alpha < +\infty$

(2) $(-\varrho, \varrho)$ konvergenciatartománynak nevezzük,

ha $0 < \alpha < +\infty$

$\Downarrow$

az összes valós szám eleme a tartománynak

(3) A tétel nem állít semmit az $|x| = \varrho$ esetről.

Pl.: $\sum_{0}^{\infty} 1 \cdot x^n$ $\quad a_n = 1$

$\Downarrow$

hatványsor

$\lim \sqrt[n]{1} = 1 = \alpha \qquad \frac{1}{\alpha} = \varrho = 1$

ha $|x| < 1$ a sor absz. konvergens $\Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

$x = 1 \quad \sum_{0}^{\infty} 1^n$ divergens sor

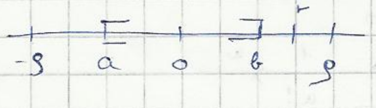
$x = -1 \quad \sum_{0}^{\infty} (-1)^n$ divergens sor

$(-1, 1)$: konvergenciatartomány

Mj.: Néhány esetben a D'Alembert-féle hányadoskritérium is használható a konvergenciatartomány meghatározása.

Tétel: Legyen a $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara $\varrho \Rightarrow$ tetszőleges $[a, b] \subset (-\varrho, \varrho)$ esetén a hatványsor egyenletesen konvergens $[a, b]$-on.

Biz.: $[a, b] \subset (-\varrho, \varrho)$



198 – 209

$\exists\, r \in (-\varrho, \varrho)$ úh.

$|x| < r \quad \forall\, x \in [a, b]$ esetén

TK 150 – 151o

$|a_n x^n| < |a_n r^n| =$

$\sum \frac{1}{n!} = e$

$= |a_n| r^n$ és $\sum_0^\infty |a_n| r^n$ abszolút konv.

és pozitív

+ Weierstrass-tétel $\Rightarrow$ állítás

Tétel: Legyen $\sum_0^\infty a_n x^n$ hatványsor konv. sugara $0<\rho<+\infty$.

Ekkor $f: (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ összegfgv folytonos

Biz: nem kell!

A fgv sorozatnál a folytonosságra vonatkozó tétel-ből következik.

VII. tétel

Elemi függvények

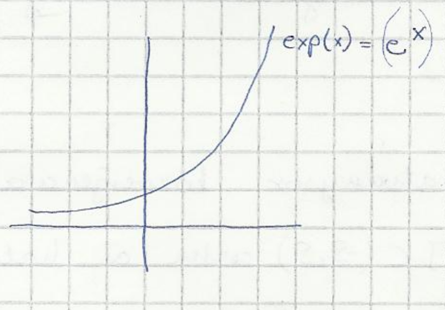
Def.: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ fgv-t

EXPONENCIÁLIS fgv-nek nevezzük.

jel.: exp ; exp (x) ; exp x ;

x helyen vett helyettesítési érték

Mj.:



Mj.: Cauchy-Hadamard = C-H

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n} x^n$$

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n!}}_{\text{div. } +\infty}} = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén konvergens}$$

Tétel: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Biz: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$

mindketten abszolút konvergensek $\Rightarrow$ szorzat is absz. konvergens

és megegyezik a tényezők szorzatával
(összege$k$)

Cauchy-szorzat:

$$\left(c_0 = a_0 b_0,\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0;\ c_2 = a_0 b_2 + \dots\right)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} x^k y^{n-k}\right)$$

$\underbrace{\langle \text{szorzunk és osztunk } n!\text{-sal.}\rangle}_{*}$

$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$ $\rightarrow$ így írható fel az általános tag.

$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ n-ből hányféleképpen választható ki k elem

Binomiális-tétel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

$$* \quad (x+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \underline{\underline{\exp(x+y)}}$$

Tétel: $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén

1., $\exp(x) > 0$

2., $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Biz.: triviális

def-ből következik, h. $\exp(x) \overset{x>0}{>} 1 > 0$
$\exp(0) = 1$

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \Rightarrow 2,\ \text{tel.}$$

$-x < 0 \Rightarrow -(-x) = x > 0$

1. tel.

Tétel: Az exp-is fgv szigorúan monoton növekvő, folytonos fgv, értékkészlete ⊕ valós számok halmaza.

Biz.:

(1) folytonos $\Leftarrow$ az összegfüggvény folytonosságára vonatkozó tételből.

(2) legyen $y > x$

$$\exp(y) = \exp((y-x)+x) = \underbrace{\exp(y-x)}_{>1, \text{ mert } y-x>0} \cdot \exp(x) \Rightarrow \exp(y) > \exp(x) \Rightarrow$$

$\exp(0) = 1$

$x > 0 \quad \exp(x) > 1$

$\Rightarrow$ SZIG. MON. NÖVEKEDŐ

(3) értékkészlete a $\mathbb{R}^+$

$\exp(1) = e$ $\qquad \exp(1+1) = (\exp 1)(\exp 1) = e \cdot e = e^2$

$\exp(n) = e^n$

$\lim\limits_{n \to \infty} e^n = +\infty$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{e^n} = 0$

legyen $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges

$\exists \ m, n \in \mathbb{N}$

$\exp(n) < \alpha < \exp(m)$

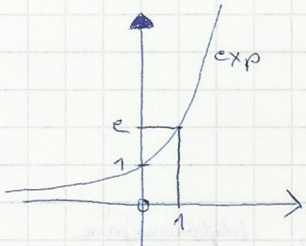
exp. fgv. folytonos +

Bolzano $\Rightarrow$

áll: $R_{\exp} = \mathbb{R}^+$

lesz olyan érték, amely α-tól nagyobb és kisebb

Mj.:



Tétel: A $\lim_{x \to \infty} \exp(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

Def.: Az exp. fgv inverzét LOGARITHMUS FGV-nek nevezzük.

jel: log, ln „logaritmus naturalis"

Tétel: a, A log fgv folytonos, szig mon növekvő értékkészlete a valós számok halmaza

b, TRIVI!

Mj.:

Tétel: ~~$+\infty$-ben a hat. értéke~~ $+\infty$

~~$\lim_{x \to 0+0} \log(x) = -\infty$~~

Mj.: kiegészíteni a log. tulajdonságait + vizsgára

Def.: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \exp(x \cdot \log a)$ fgv-t a-alapú EXP. FGV-nek nev., ahol $a \in \mathbb{R}^+$

jelölése: $\exp_a(x)$

Mj.: $x_2 > x_1$

$x_2 \log a > x_1 \cdot \log a$, ha $a > 1$

$\exp(x_2 \log a) > \exp(x_1 \log a)$ mivel az exp fgv

szig. mon. nő

$\exp_a(x_2) > \exp_a(x_1)$

Tulajdonságok:

a) Tétel: Az a alapú exp-fgv szigorúan monoton nő, ha $a > 1$, szigorúan csökken, ha $a < 1$ és $0 < a$

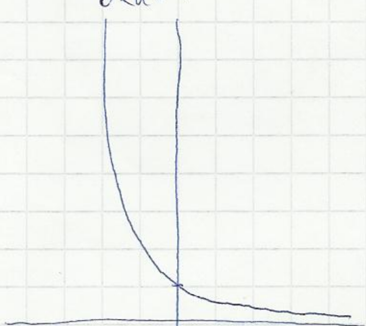
b) folytonos

c) ha $0 < a < 1$, $1 < a \Rightarrow R_{\exp_a} = \mathbb{R}$

ha $a = 1 \Rightarrow R_{\exp_a} = \{1\}$

Biz: triv

Mj.:



Def.: Ha $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, akkor az a alapú exp. fgv inverzét a alapú logaritmusfgv-nek nev.

Tul: Hf.! JEGYZET!

hatványfgv, trigonometrikus fgv. ...stb

felsorolni az összes elemi fgv-t.
- def
- tul-ok
- gráf

exp	exp(a)
log	log(a)
sin	cos
tg	ctg

Def.: Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, akkor $\exp(x \log a) = \exp_a(x) = a^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Mj.: $x \in \mathbb{Q}$ esetén az előző def. megegyezik az eddig ismert rac. kitevős def-val.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$