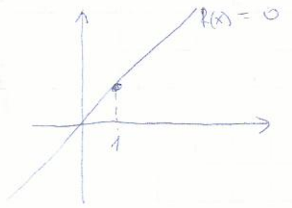
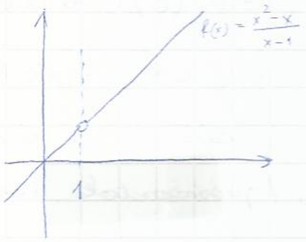
4. előadás

$f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} x = \underline{\underline{1}}$$





Biz.: a) $\Rightarrow$

felt $(\forall \varepsilon > 0)\ \exists \delta(\varepsilon)\ \forall x \in H\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$

$\langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to H \setminus \{x_0\}$ $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

$$\forall \delta > 0\ \ \exists \underbrace{N(\delta)}_{N(\varepsilon)}\ \ \underbrace{(n > N(\delta))}_{N(\varepsilon)} \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta \xRightarrow{\text{a felt miatt}} |f(x_n) - y_0| < \varepsilon$$

mivel ε-tól függ a δ

Ez annak a def-ja, h. y_0 az $f(x_n)$ sorozat határértéke

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

q.e.d. → (quod erat demonstrandum / ezt akartuk bizonyítani)

$\Leftarrow$ Belátjuk, hogy $\langle f(x_n) \rangle$ fgvértéksorozatok közös határértékhez tartanak.

$\langle x_n' \rangle : \mathbb{N} \to H \setminus \{x_0\}$ $\lim_{n\to\infty} x_n' = x_0 \to \lim_{n\to\infty} f(x_n') = z$

$\langle x_n'' \rangle : \mathbb{N} \to H \setminus \{x_0\}$ $\lim_{n\to\infty} x_n'' = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = y$

$z = y$

$\langle x_n''' \rangle : \mathbb{N} \to H \setminus \{x_0\}$ $x_n''' := \begin{cases} x_n' & \text{ha } n \text{ páros} \\ x_n'' & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

Ez a részsorozat x_0-hoz tart.

$\lim_{n\to\infty} x_n''' = x_0$ $\quad \langle f(x_n''')\rangle$ divergens $\quad \lightning$ ellentmondás

Belátjuk, hogy x_0-ban $\exists$ határérték!

indirekt $\quad$ def

$$\left(\exists\, y_0 \quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x\in H \quad x\neq x_0 \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-y_0|<\varepsilon\right)$$

$$\forall y_0\in\mathbb{R} \quad \exists \varepsilon>0 \quad \forall \delta\in\mathbb{R} \quad \exists x\in H\setminus\{x_0\} \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-y_0|\geq\varepsilon$$

$\varepsilon=1$ $\quad$ y_0 fgvértéksorozat közös határértéke

$\delta=1 \quad \exists\, x_1\in H\setminus\{x_0\} \quad |x_1-x_0|<1 \Rightarrow |f(x_1)-y_0|\geq 1$

$\delta=\frac{1}{2} \quad \exists\, x_2\in H\setminus\{x_0\} \quad |x_2-x_0|<\frac{1}{2} \Rightarrow |f(x_2)-y_0|\geq 1$

$\vdots$

$\delta=\frac{1}{n} \quad \exists\, x_n\in H\setminus\{x_0\} \quad |x_n-x_0|<\frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n)-y_0|\geq 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq y_0 \quad \lightning$

A fgvértéksorozat nem konv.

Pl.: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ $\quad$ Dirichlet-féle fgv.

$x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Igazoljuk! f-nek x_0-ban nem létezik határértéke

$\langle x_n\rangle:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$

$\langle x_n'\rangle:\mathbb{N}\to\mathbb{Q} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n' = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n')=1$

$\Downarrow$

x_0-ban $\nexists$ határé.

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f, g : H \to \mathbb{R}$ x_0 torl. pontja H-nak

Ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1, $\lim_{x \to x_0} (c \cdot f)(x) = c \cdot A$

2, $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = A + B$

3, $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = AB$

4, $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$ $B \neq 0$, $0 \notin R_g$

Biz: 4, Tfh $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

$\forall \langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to H \setminus \{x_0\}$ $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = B$

$\forall \langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to H \setminus \{x_0\}$ $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} g(x_n) = B$

Legyen $\langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to H \setminus \{x_0\}$ $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ tetsz. rögzített

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}$ mivel $B \neq 0$, $g(x_n) \neq 0$

$\uparrow$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n)$

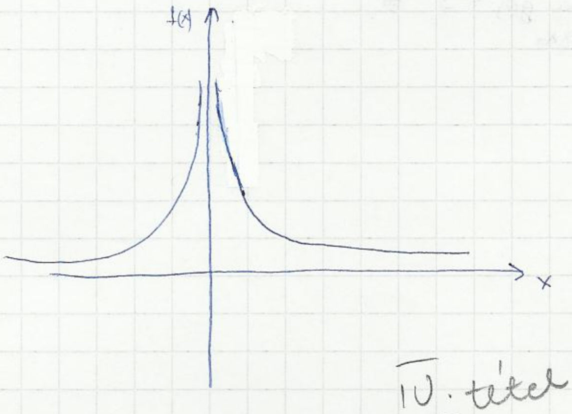
Tétel: Legyen $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}$ $f : H_1 \to \mathbb{R}$, $g : H_2 \to \mathbb{R}$

Ha x_0 torlódási pontja H_1-nek és x_0-ban $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ y_0 torl pontja H_2-nek

továbbá $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq y_0$ $\lim_{y \to y_0} g(y) = z_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = z_0$

Mj: Feltartás is hasonlóan mondható ki, mint a folytonosság esetén

$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^2}$



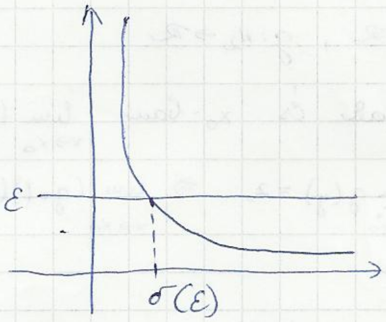
IV. tétel

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}_b$ (bővített), $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak.

Akkor mondjuk, hogy az f fgv-nek $\exists$ határértéke az x_0-ban, ha $\exists$ olyan $y_0 \in \mathbb{R}_b$ úgy, hogy y_0 bármely N_1 környezetéhez megadható az x_0 olyan N_2 környezete úgy, hogy ha $x \in \dot{N}_2 \Rightarrow f(x) \in N_1$.

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f: H \to \mathbb{R}$ H felülről nem korlátos

Akkor mondjuk, hogy $+\infty$-ben $\exists$ f-nek határértéke, ha $\exists\, y_0 \in \mathbb{R}$ úgy, h. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall x \in H$ $x > \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - y_0| < \varepsilon$



$\pm x^2$
$\pm \frac{1}{x}$ $\pm \frac{1}{x^2}$ → segítség

5. előadás

Monoton fgv-ek

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$. Akkor mondjuk, h. az f fgv. monoton növekedő, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in H$. Szigorúan monoton növekedő az f fgv, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Monoton csökkenő, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in H$

Szigorúan monoton csökkenő, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Mj.: $\log_2 x < \log_2 5$ /mert a $\log_2$ fgv. szig. mon. nő.

$x < 5$

$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 5$ /mert a $\log_{\frac{1}{2}}$ fgv. szig. mon. csökk.

$x > 5$

1310

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton. $\Rightarrow$ f fgv. invertálható

Ha f fgv. szig. mon. növekvő $\Rightarrow$ f^{-1} is szig. mon. növekvő, és ha f fgv. szig. mon. csökk-ő $\Rightarrow$ f^{-1} is szig. mon. csökkenő.

Biz.: triv.

Tétel: Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Ha f. folytonos és invertálható $\Rightarrow$ f^{-1} folytonos

Biz.: nem kell!

V. tétel

Függvénysorozatok, fgv-sorok.

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f_n: H \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2 \dots)$

$\langle f_n \rangle$-ot fgvsorozatnak nevezzük.

pl.: $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = x^n$ $\quad (n = 1, 2 \dots)$

függvények: $\underbrace{x, x^2, x^3, x^4 \dots}$

$\Downarrow$

határfgv-ek

Def.: Legyen $\langle f_n \rangle$ egy adott fgvsorozat. Akkor mondjuk, hogy a fgvsorozat konvergens az $x_0 \in H$ pontban, ha $f_n(x_0)$ valós számsorozat konvergens.

pl.: (folyt) $x_0 = \frac{1}{2}$ pontban konvergens?

$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8} \dots$ $\quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\Downarrow$

nullsorozat

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f_n: H \to \mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ fgvsorozat), $H_1 \subset H$. Akkor mondjuk, hogy az f fgv pontonként konvergens a H_1 halmazon, ha H_1 minden pontjában konvergens. H_1 halmazt az $\langle f_n \rangle$ fgvsorozat konvergenciatartományának nevezzük.

pl.: (folyt)

$x = 0$	konvergens	
$x = 1$	konvergens	1-hez konvergál
$x = -\frac{1}{2}$	-"-	0-hoz konvergál

$H_1 = (-1; 1]$ $\qquad x = -1$-nél divergens

Def. (folyt) $H_1 \Rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ az f fgv-t az $\langle f_n \rangle$ fgvsorozat határfgv-ének nevezzük.

pl.: (folyt)

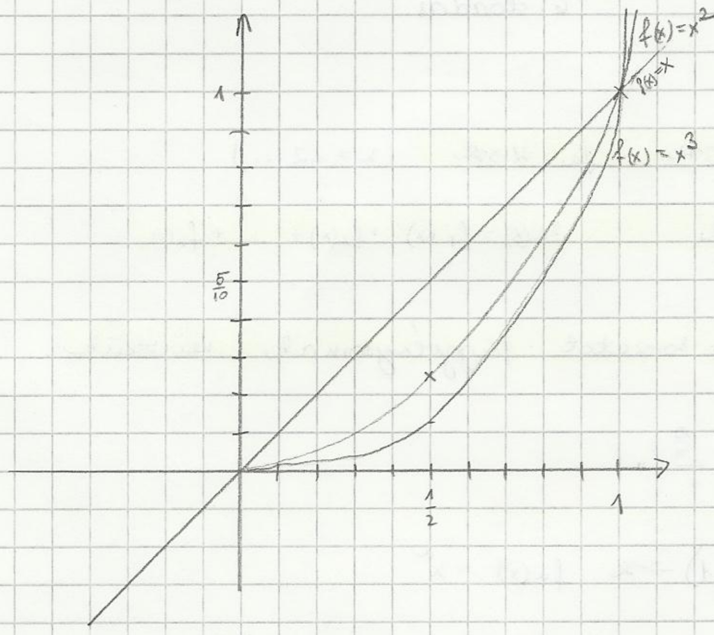
$f: (-1, 1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x \in (-1,1) \\ 1, \text{ ha } x = 1 \end{cases}$

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f_n: H \Rightarrow \mathbb{R}$. Akkor mondjuk, hogy az $\langle f_n \rangle$ fgvsorozat egyenletesen konvergál az f határfgv-hez, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ úgy, hogy $n > N(\varepsilon) \Rightarrow$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in H_1$

pl.: $f_n: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = x^n$

$f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ $f(x) = 0$

$\langle f_n \rangle$ egyenletesen konvergál f-hez



Mj.: Ha f egyenletesen konvergens a H_1 halmazon $\Rightarrow f$ pontonként is konvergens H_1-en, de visszafelé nem igaz.

Déf.: Legyen $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_6$ valós számsorozat. Akkor mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ nullsorozat, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ $n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$.

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f_n : H \to \mathbb{R}$ és $H_1 \subset H$. Tfh $\langle f_n \rangle$ fgvsorozat pontonként konvergens a H_1 halmazon. Ha $\langle a_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_6$ $a_n = \sup \{ |f_n - f(x)| \ \forall x \in H_1 \}$ nullsorozat $\Rightarrow \langle f_n \rangle$ egyenletesen konvergál H_1 halmazon.

Biz: nem kell!

Tétel: (Cauchy) Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f_n : H \to \mathbb{R}$. Az f_n fgvsorozat egyenletesen konvergens a H_1 halmazon $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ $m, n > N(\varepsilon)$ esetén $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in H_1$

III.18. 6. előadás

Déf.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f_n : H \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2 \dots)$

$\langle s_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$

Az $\langle s_n \rangle$ fgv sorozatot függvénysornak nevezzük.

jel.: $\sum_1^\infty f_n$

Pl.: $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = x^n$

$\sum_1^\infty x^n$

Déf.: Akkor mondjuk, hogy a $\sum_1^\infty f_n$ fgvsor konvergens, ha $\langle s_n \rangle$ fgvsorozat konvergens.

Def.
Akkor mondjuk, hogy a $\sum_1^\infty f_n$ fgvsor egyenletesen konvergens, ha $\langle s_n \rangle$ fgvsorozat egyenletesen konvergens

Def.:
Ha az f fgv az $\langle s_n \rangle$ fgvsorozat határfgv-e, akkor ezt az $\sum_1^\infty f_n$ fgvsor összegfgv-ének nevezzük.

Mj.: Akkor mondjuk, hogy a $\sum_1^\infty f_n$ fgvsor feltételesen konvergens, abszolút konvergens ill. divergens, ha $\sum_1^\infty f_n(x)$ valós számsor feltételesen konvergens, abszolút konv., ill. divergens.
$(x \in H)$

Pl.: $\sum_0^\infty x^n \qquad x \in (-1,1)$

Def.: $\sum_1^\infty f_n$ fgvsor konvergenciatartománya megegyezik az $\langle s_n \rangle$ fgvsorozat konvergenciatartományával.

Tétel: Legyen $f_n : H \to \mathbb{R} \quad (n = 1,2 \dots)$, $H \subset \mathbb{R}$
$\sum_1^\infty f_n$ fgvsor egyenletesen konvergens $\Leftrightarrow$, ha $\forall$ pozitív ε-hoz $\exists N(\varepsilon)$ üh. $n, m > N(\varepsilon)$ $(n > m)$ $\Rightarrow$

$$|f_{m+1} + f_{m+2} + \dots + f_n| < \varepsilon$$

CAUCHY-KRITÉRIUM!

Biz.: fgvsorozatokra vonatkozó Cauchy-tételből következik!

Tétel: (WEIERSTRASS-TÉTEL)
Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f_n : H \to \mathbb{R} \quad (n = 1,2 \dots)$
Ha $\exists$ olyan $\sum_1^\infty a_n$ valós számsor, amely konvergens, és $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall x \in H$ $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\Rightarrow$ $\sum_1^\infty f_n$ fgvsor

egyenletesen konvergens a H halmazon.
(Hasonló a majoráns krit-hoz)

Biz: $\sum_1^\infty a_n$ konvergens + Cauchy-féle konvergenciakritérium

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\ n>m>N(\varepsilon) \Rightarrow |a_{m+1}+a_{m+2}+\dots a_n|<\varepsilon$

mivel $a_n \geq 0 \Rightarrow a_{m+1}+a_{m+2}+\dots+a_n<\varepsilon$

$$|f_{m+1}(x)+f_{m+2}(x)+\dots+f_n(x)| \leq \underbrace{|f_{m+1}(x)|+|f_{m+2}(x)|+\dots|f_n(x)|}_{\text{absz. é. azonosságai miatt}} \leq$$

$$\leq \underbrace{a_{m+1}+a_{m+2}+\dots+a_n}_{\text{felt miatt}} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$\sum_1^\infty f_n$ egyenletesen konvergens

Pl $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+x^6}$

$$\left|\frac{1}{n^2+x^6}\right| = \frac{1}{n^2+x^6} < \frac{1}{n^2} \quad \text{és} \quad \underbrace{\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}}_{\text{konvergens}}$$

+ Weierstrass tétel $\Rightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{n^2+x^6}$ egyenletesen konvergens

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f_n : H \to \mathbb{R}$ $(n=1,2\dots)$

$H_1 \subset H$, $x_0 \in H$

Ha $\langle f_n \rangle$ fgvsorozat minden tagja folytonos az x_0 pontban, és $\langle f_n \rangle$ fgvsorozat egyenletesen konvergál az $f: H_1 \to \mathbb{R}$ határfgvhez $\Rightarrow f$ határfgv is folytonos.