2003. 11. 11.

5

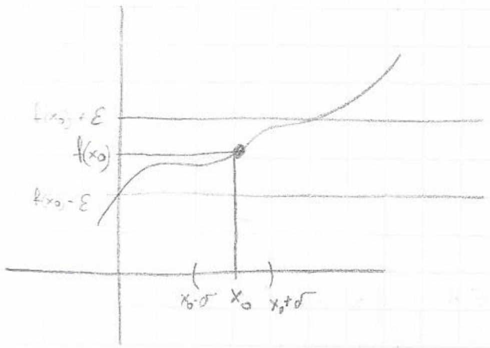
1. előadás

I. tétel

Valós fgv-ek folytonossága

Def: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f: H \to \mathbb{R}$ $x_0 \in H$

Akkor mondjuk, hogy f fgv. folytonos az x_0 pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall x \in H$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f: H \to \mathbb{R}$ $x_0 \in H$.

f függvény folytonos x_0 pontban $\Leftrightarrow$ ha f jobbról és balról is folytonos x_0-ban.

Biz: $\Leftarrow$ Tfh. f jobbról és balról is folytonos

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ε-tól függő delta $[\delta_1(\varepsilon)]$ úh ha $x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_2(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $x_0 - \delta_2(\varepsilon) < x < x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

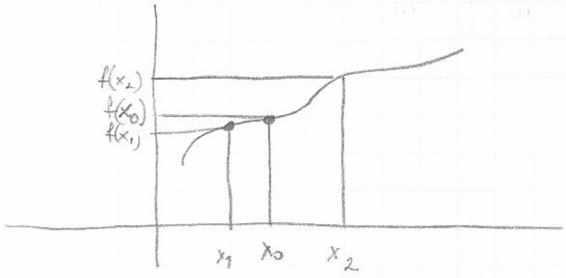
$\varepsilon > 0$ tetszőleges $\delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in H$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Tétel: Átviteli elv:

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f: H \to \mathbb{R}$ $x_0 \in H$

f fgv. folytonos az x_0 pontban $\Leftrightarrow$, ha $\forall$ olyan $\langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to H$ és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$



! Biz. $\Rightarrow$

folytonos $\Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon)$ úh. $\forall x \in H$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to H$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ (x_0-hoz konvergál az $\langle x_n \rangle$) tetszőleges

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)$ úgy, hogy $n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon$ ($\to$ konv. def.) $\Rightarrow$

$\varepsilon = \delta$ legyen $\varepsilon = \delta$

$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow \underbrace{f(x_n) \text{ fgvértéksorozat } f(x_0)\text{-hoz konvergál}}$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

$\Leftarrow$ $\forall \langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to H$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

feltétel

Azt kell belátni, h. a fgv. folytonos

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall x \in H$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Indirekt:

$(\forall \Leftrightarrow \exists)$

$\exists\ \varepsilon > 0\ \forall \delta\ \exists\ x \in H$ ú.h. ha $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

3.

$\varepsilon = 1 \quad \delta = 1 \quad \exists\, x_1 \in H$ úh. $|x_1 - x_0| < 1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| \geq 1$

$\delta = \frac{1}{2} \quad \exists\, x_2 \in H$ úh $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2} \Rightarrow |f(x_2) - f(x_0)| \geq 1$

$\vdots$

$\delta = \frac{1}{n} \quad \exists\, x_n \in H$ úh $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \geq 1$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$x_n \to x_0$ (konv.) $\quad f(x_n) \not\to f(x_0)$

ell. a feltétellel $\lightning$ Tehát a tétel igaz, a fgv. folytonos.

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $\quad f: H \to \mathbb{R} \quad H_1 \subset H$

Akkor mondjuk, hogy az f fgv folytonos a H_1 halmazon, ha H_1 minden pontjában folytonos.

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $\quad f: H \to \mathbb{R}$

Akkor mondjuk, hogy az f fgv egyenletesen folytonos H halmazon, ha $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall\, x, y \in H$ $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Mj.: Az egyenletes folytonosságból következik a folytonosság. A folytonosságból nem következik az egyenletes folytonosság.

2. előadás

II. 18.

pl.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 + 2$

$x_0 \in \mathbb{R} \quad \langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ tetszőleges

$\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = \lim\limits_{x_n \to x_0} (x_n^2 + 2) = x_0^2 + 2 = f(x)$

A fgv. tetszőleges x_0 pontban folytonos

Tétel: Ha $H \subset \mathbb{R}$, f és $g : H \to \mathbb{R}$, $x_0 \in H$ és f és g folytonos az x_0 pontban, akkor $c \cdot f$ $(c \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(0 \notin R_g)$ fgv-ek folytonosak x_0-ban.

Mj.: 1, $(cf)(x) := c f(x)$

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ → TK./Biz.

$(fg)(x) := f(x)\, g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

2, $f : H_1 \to \mathbb{R}$, $g : H_2 \to \mathbb{R} \Rightarrow D_{f+g} = H_1 \cap H_2$

$(fg)(x) := f(x)\, g(x)$

Biz: $\langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to H$ $\quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ $\quad x_0 \in H$ tetszőlegesen rögzített

átv. elv.

$$\lim_{x_n \to x_0} (fg)(x_n) = \lim_{x_n \to x_0} f(x_n)\, g(x_n) = f(x_0)\, g(x_0) = (fg)(x_0) \Rightarrow$$

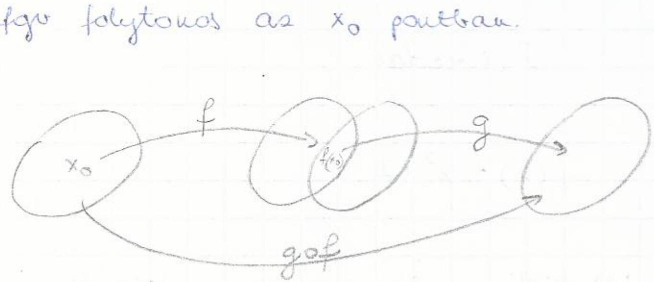
f és g folytonos az x_0 pontban

$\Rightarrow (fg)$ folytonos az x_0-ban

Tétel: Legyenek $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}$

$f : H_1 \to \mathbb{R}$, $g : H_2 \to \mathbb{R}$, $x_0 \in H_1$, $f(x_0) = y_0 \in H_2$

Ha f fgv folytonos az x_0 pontban és a g fgv folytonos az $f(x_0) = y_0$ pontban, akkor a $g \circ f$ fgv folytonos az x_0 pontban.



Biz: def. felhasználásával.

$\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített

g fgv. folytonos az y_0 pontban $\Longleftrightarrow$

5

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall y \in H_2$ esetén

ha $|y - y_0| < \delta_1(\varepsilon) \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$

ettől függ

Tetszőleges $\delta_1(\varepsilon)$ esetén $\exists\ \delta_2(\delta_1(\varepsilon))$ úgy, hogy $\forall\ x \in H_1$

$|x - x_0| < \delta_2(\delta_1(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1(\varepsilon)$

$y \quad y_0$

legyen δ

$g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \Rightarrow g \circ f$ folytonos x_0 pontban

+ jeltartás $\Rightarrow$ * (80)

II. tétel

Kompakt halmazon folytonos függvények

*Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, H kompakt, $f: H \to \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow$ R_f kompakt

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, H kompakt $f: H \to \mathbb{R}$ fgv folytonos. Ekkor $\exists\ x_1, x_2 \in H$ úgy, hogy $f(x_1) = \inf R_f$, $f(x_2) = \sup R_f$

Tétel: Ha $H \subset \mathbb{R}$, H kompakt és $f: H \to \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow f$ egyenletesen folytonos H-n.

nem kell a bz.

*Biz: R_f kompakt $\Leftrightarrow R_f$ korlátos és zárt

(a), „zárt":

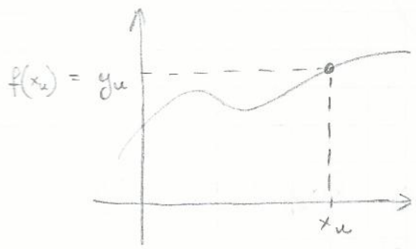
indirekt.

Tfh. R_f nem zárt $\Rightarrow$

[illegible] zárt, ha tart. minden torlódási pontját.

$\Rightarrow \ \exists\, y_0 \notin R_f \quad y_0$ torlódási pont

$\exists\, y_n \in R_f \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$



$f(x_n) = y_n \Rightarrow x_n \in H$

mivel H kompakt, H korlátos és zárt $\Rightarrow$

$\Rightarrow \langle x_n \rangle$ korlátos $\xRightarrow{\text{B-W. tétel}} \langle x_n \rangle\ \exists$ konvergens részsorozata

$\lim_{n\to\infty} x_{p(n)} = x_0 \quad , \ x_0 \in H$

Mivel f fgv folytonos, f folytonos x_0-ban is. $\Rightarrow$

átviteli elv

$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_{p(n)}) = f(x_0)$ $\quad$ ellentmondás ↯

mivel $x_0 \in H$ $\Downarrow$ $f(x_0) \in H$

$f(x_0) = y_0 \notin R_f$ indirekt feltevés

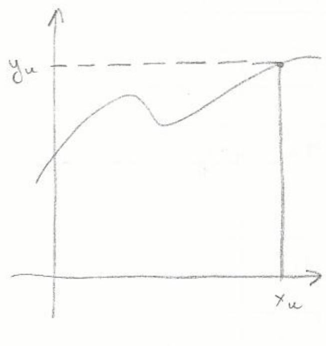
↯

b, „R_f korlátos"

indirekt biz.

Tfh. R_f nem korlátos (felülről)

$\exists\ y_n \in R_f$ úgy, hogy $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$



$f(x_n) = y_n$

$x_n \in H$, mivel H korlátos $\Rightarrow \langle x_n \rangle$ korlátos

$\xRightarrow{\text{B-W. tét.}} \langle x_n \rangle\ \exists$ konv. részsorozata

részsorozat határértéke: $\lim_{n\to\infty} x_{p(n)} = x_0$, mivel H zárt $x_0 \in H$

Mivel f fgv folytonos x_0-ban: $\quad (\Rightarrow$ átv. elv$)$

$\lim_{n\to\infty} f(x_{p(n)}) = f(x_0)$

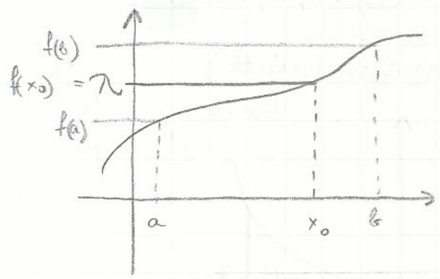
$\mathcal{F}$; $\left[\exists\ y_n \in R_f \text{ úgy, hogy } \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty\right]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{p(n)}) = +\infty$

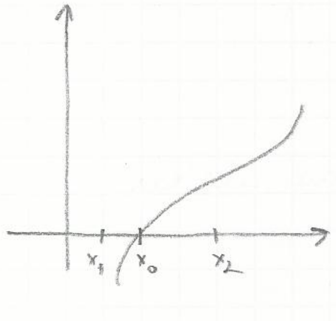
$\lightning$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{p(n)}) = f(x_0)$

3. előadás

Tétel: Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos és $f(a)\neq f(b)$. Ekkor tetszőleges olyan λ-hoz, amely az $f(a)$ és $f(b)$ által meghatározott nyílt intervallumban van $\exists\ x_0 \in (a,b)$ úgy, hogy $f(x_0)=\lambda$ ← Bolzano-tétel



Következmény: $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ folytonos fgv és $x_1, x_2 \in (a,b)$
(lehet nyílt és zárt is) $f(x_1)f(x_2)<0 \Rightarrow \exists\ x_0\in(x_1,x_2)$
úgy, hogy $f(x_0)=\emptyset$

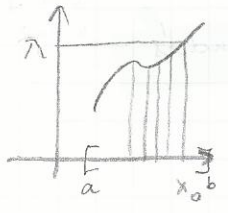


Biz. (Bolzano)

Tfh. $f(a)<f(b)$ és $\lambda\in(f(a),f(b))$

$f(a)<\lambda<f(b)$

$x_0 = \sup\{x \mid x \in [a,b],\ f(x) \le \lambda\}$



Indirekt.

Tfh.. $f(x_0) \neq \lambda$

a, $f(x_0) > \lambda$ b, $f(x_0) < \lambda$

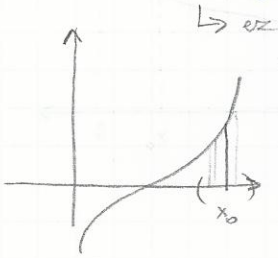
a, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ $F(x) = \lambda - f(x)$

F folytonos, $F(x_0) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy $\forall x \in S_r(x_0) \cap [a,b] \Rightarrow$

$F(x) < 0$ (jeltartás miatt) $\Rightarrow$

↳ ez egy tétel lényege



$\Rightarrow F(x) = \lambda - f(x) < 0$

$\Downarrow$

$\lambda < f(x)$ ↯ ellentmondás x_0 def.-val.

b, ugyanúgy

$\Downarrow$

ebből következik az állítás

Tétel: (Jeltartás) *

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f : H \to \mathbb{R}$, $x_0 \in H$ és f fgv. folytonos x_0 pontban.

Ha $f(x_0) \overset{(<)}{>} 0$, $\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{R}^+$ úgy hogy $\forall x \in S_r(x_0) \cap H$

$f(x) \overset{(<)}{>} 0$

9.,

Biz. Def.-ből következik

$$\varepsilon = |f(x_0)|$$

+

III. tétel (+ átviteli elv) (20)

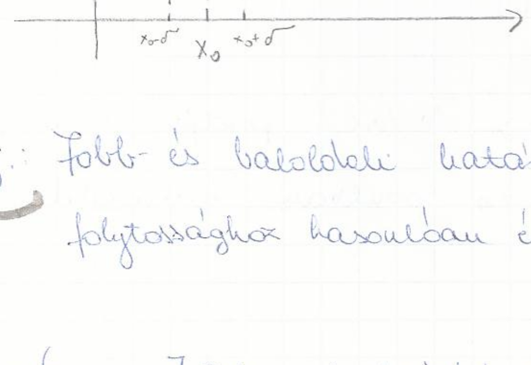
Valós fgv-ek határértéke

7

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja H-nak. Akkor mondjuk, hogy az f-nek az x_0-ban létezik HATÁRÉRTÉKE, ha létezik olyan $y_0 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall x \in H$, $x \neq x_0$ esetén, ha $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Mj.: y_0-t az f. fgv x_0-beli HATÁRÉRTÉKének nevezzük.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

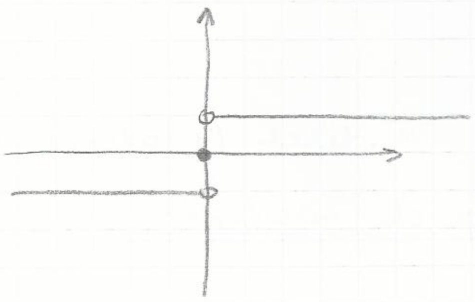


Mj.: Jobb- és baloldali határértéket a jobb- és baloldali folytossághoz hasonlóan értelmezzük. TK 126 o

f fgvnek $(-\infty, x_0] \cap H$ leszűkítésének van határértéke x_0-ban, $\Rightarrow$ ez az f fgv x_0-beli baloldali határértéke.

jel.: $\lim\limits_{x \to x+0} f(x)$ — jobbo.-i határ.

$\lim\limits_{x \to x_0 - x} f(x)$ — baloldali pl. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$.



$\lim_{0-0} f(x) = -1$

$\lim_{0+0} f(x) = 1$

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$ x_0 torl. pontja H-nak. Az f-nek x_0-ban létezik határértéke $\Leftrightarrow$ ha létezik jobb és baloldali határértéke és ezek egyenlők. (A közös határérték az f- fgv. x_0-beli határértéke.)

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 torl. pontja H-nak. f fgv folytonos x_0-ban, $\Leftrightarrow$ f-nek létezik határértéke x_0-ban és az megegyezik a helyettesítési értékkel.

Biz. Triviális (def. fogalommal)

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 torl. pontja H-nak, ha f fgv-nek létezik x_0 pontban határértéke, akkor az egyértelmű.

Biz. indirekt.

Tfh. $y_1 \neq y_2$ is határértéke az f-nek

$$\varepsilon = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

$\varepsilon = \frac{y_2 - y_1}{2}$ $\exists \delta_1(\varepsilon)$ $\forall x \in H \setminus \{x_0\}$ $|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - y_1| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{y_2 - y_1}{2}$ $\exists \delta_2(\varepsilon)$ $\forall x \in H \setminus \{x_0\}$ $|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - y_2| < \varepsilon$

$$\delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_1| < \varepsilon$ és $|f(x) - y_2| < \varepsilon$

$$-\varepsilon < f(x) - y_1 < \varepsilon$$

$$-\frac{(y_2 - y_1)}{2} < f(x) - y_1 < \frac{y_2 - y_1}{2}$$

$$f(x) < \frac{y_2 + y_1}{2}$$

$$-\varepsilon < f(x) - y_2 < \varepsilon$$

$$\underbrace{-\frac{y_2 + y_1}{2} < f(x) - y_2}_{} < \frac{y_2 - y_1}{2}$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2} < f(x) - y_2$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} < f(x)$$

↯ ellentmondás

Átviteli elv!

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ $f: H \to \mathbb{R}$ x_0 torlódási pontja H-nak.
Az f fgv-nek az x_0 pontban $\exists$ határértéke $\Leftrightarrow$
ha $\forall \langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to H \setminus \{x_0\}$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ esetén $\langle f(x_n) \rangle$
fgvérték sorozat közös határértékhez konvergál.
(a közös határérték az f x_0-beli határértékével egyezik meg.)