Elemi függvények

Def.: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ függvényt exponenciális függvénynek nevezzük.

(Legyen adott $a > 0$, $a \neq 1$ valós szám. Egy a valós számok halmazán értelmezett szigorúan monoton f függvényt a-alapú exponenciális függvénynek nevezzük, ha $f(x) = a^x$ minden $x \in \mathbb{Q}$ esetén.)

Tulajdonságai:

értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R}$

értékkészlete: • ha $0 < a < 1$ v. $a > 1$ $\Rightarrow R_f = \mathbb{R}$
• ha $a = 1$ $\Rightarrow R_f = \{1\}$

asszimptota: x tengely (mivel a fgv grafikonja megközelíti, de soha nem éri el.)

monotonitása: • ha $a > 1 \Rightarrow$ szigorúan monoton növekvő
• ha $0 < a < 1 \Rightarrow$ szigorúan monoton csökkenő

szélsőértéke: nincs

zérushelye: nincs (a grafikon az y tengelyt a (0;1) pontban metszi)

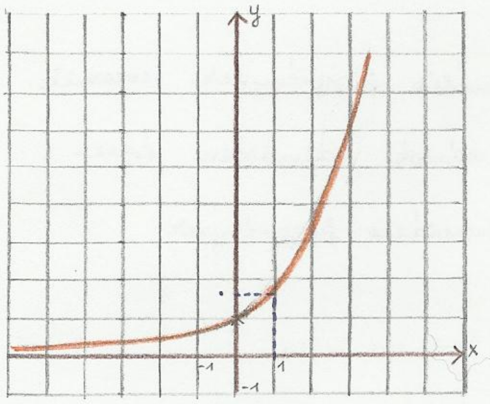
paritása: nem páros és nem páratlan fgv.

periódikusság: nem periódikus fgv.

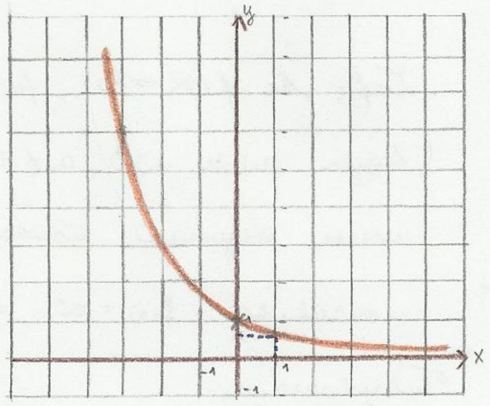
folytonosság: folytonos fgv.

korlátosság: alulról korlátos fgv.

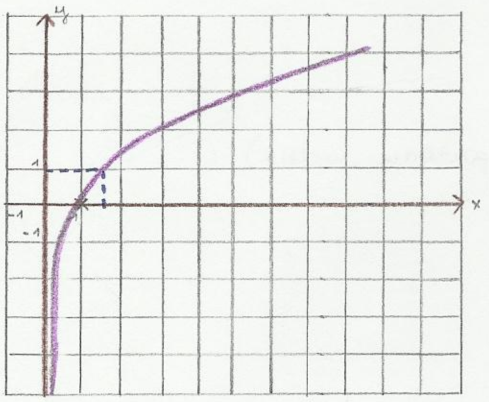
inverze: mivel kölcsönösen egyértelmű leképezés, van inverze: $g(x) = \log_a x$, ahol $a > 0$, de $a \neq 1$.
(Ha az alapok egymás reciprokai, akkor grafikonjuk az y tengelyre nézve egymás tükörképei)



$f(x) = a^x \quad (a > 1)$

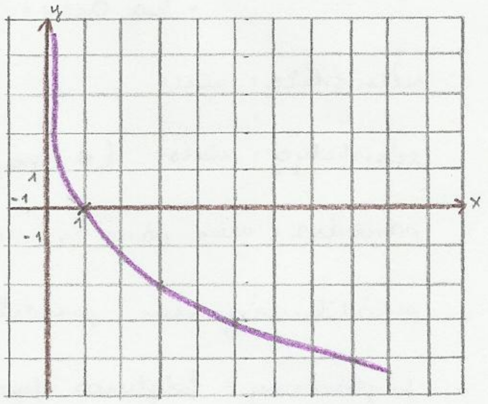


$f(x) = a^x \quad (0 < a < 1)$



$g(x) = \log_a x \quad (a > 1)$

Inverze



$g(x) = \log_a x \quad (0 < a < 1)$

Def.: Az exponenciális függvény inverzét logaritmus függvénynek nevezzük.

(Legyen adott $a>0$, $a\neq1$ valós szám. Azt a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amely az a-alapú exponenciális függvény inverz függvénye, a-alapú logaritmus függvénynek nevezzük.

Tulajdonságai:

értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R}$

értékkészlete: $R_f = \mathbb{R}$

asszimptota: y tengely (mivel a fgv grafikonja megközelíti, de soha nem éri el)

monotonitása: • ha $a>1 \Rightarrow$ szigorúan monoton növekvő
• ha $0<a<1 \Rightarrow$ szigorúan monoton csökkenő

szélsőértéke: nincs

zérushelye: $x=1$ (mert $f(1) = \log_a 1 = 0$)

paritása: nem páros és nem páratlan fgv.

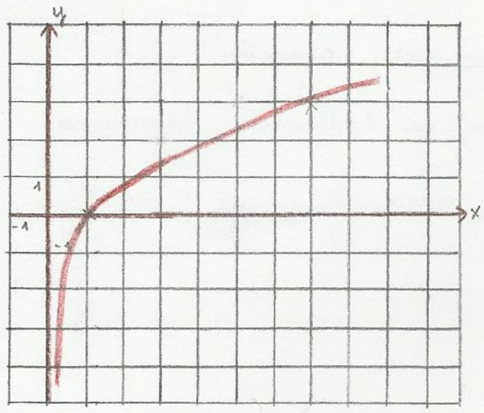
periódicitás: nem periódikus fgv.

folytonosság: folytonos fgv.

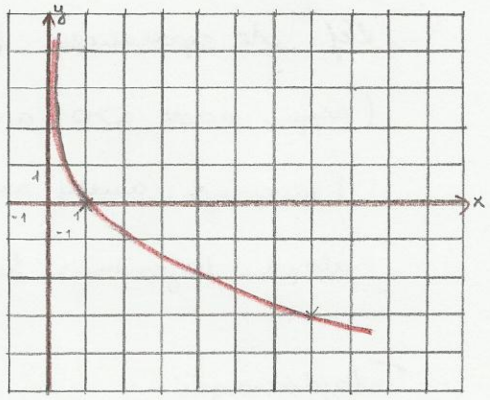
korlátosság: nem korlátos fgv.

inverze: mivel kölcsönösen egyértelmű leképezés, van inverze: $g(x) = a^x$, ahol $a>0$, de $a\neq1$.

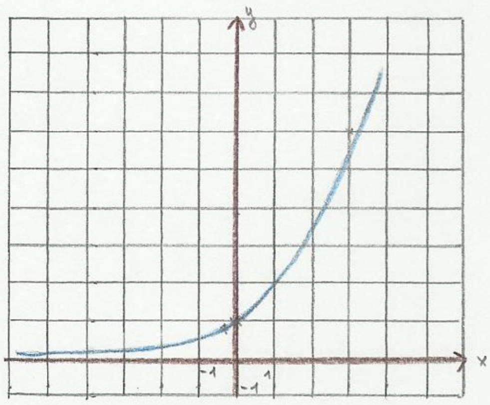
(Ha az alapok egymás reciprokai, akkor grafikonjuk az x tengelyre nézve egymás tükörképei)



$f(x) = \log_a x \quad (a>1)$

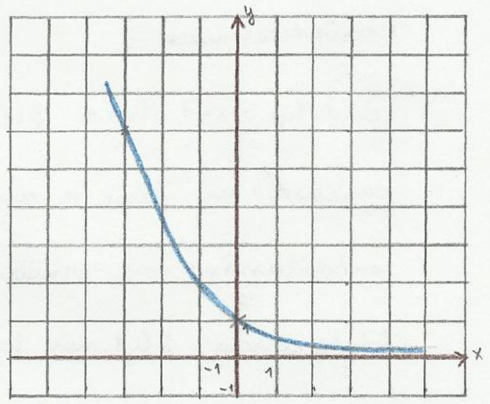


$f(x) = \log_a x \quad (0<a<1)$



$g(x) = a^x \quad (a>1)$

Inverze



$g(x) = a^x \quad (0<a<1)$

Def.: Az $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ függvényt sinus függvénynek nevezzük.

(Azt a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amely minden valós számhoz az ugyannyi radián mértékű szög sinusát rendeli, sinusfüggvénynek nevezzük, és $f(x) = \sin x$ módon jelöljük.)

Tulajdonságai:

értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R}$

értékkészlete: $R_f = [-1; 1]$

monotonitása:
- $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ intervallumon: szigorúan monoton növekvő
- $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ intervallumon: szigorúan monoton csökkenő

$(k \in \mathbb{Z})$

zérushelye: $x = k \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ (mivel $f(k\pi) = \sin(k\pi) = 0$.)

paritása: páratlan fgv (mivel $\sin(-x) = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén)
(„az origóra szimmetrikus")

periódikusság: periódikus fgv. (mivel $\sin x = \sin(x + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$), periódusa: 2π

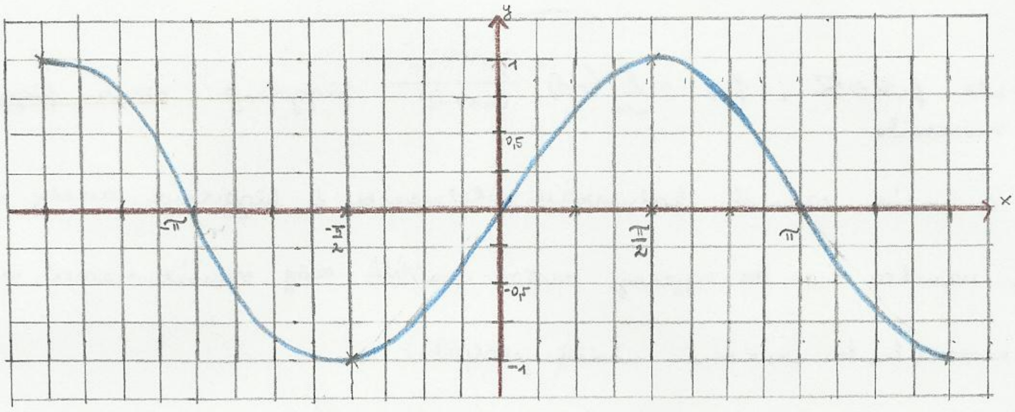
folytonosság: folytonos fgv.

korlátosság: korlátos fgv. $k = -1$: pontos alsó korlát
$k = 1$: pontos felső korlát

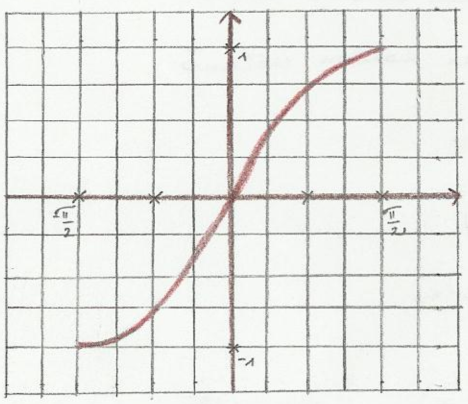
inverze: A sinus fgv $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumra való leszűkítésének inverzét arkusz szinusz fgv-nek nevezzük, és „arcsin"-al jelöljük.

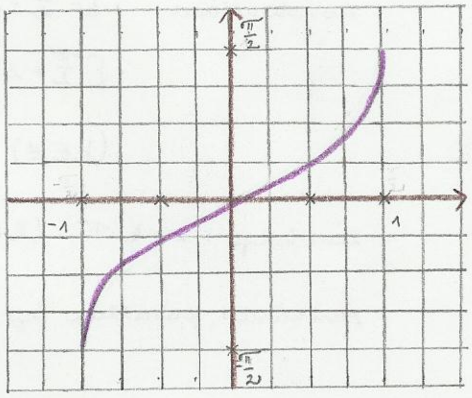
szélsőértéke: minimuma és maximuma is van

minimum helye: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ minimum értéke: $y = -1$, ahol $k \in \mathbb{Z}$
maximum helye: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ maximum értéke: $y = 1$, ahol $k \in \mathbb{Z}$



$f(x) = \sin x$





$f(x) = \sin x$ $\quad D f = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

Inverze

$g(x) = \arcsin x$

Def.: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ függvényt cosinus függvénynek nevezzük.

(Azt a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amely minden valós számhoz az ugyanennyi radián ívmértékű szög cosinusát rendeli cosinusfüggvénynek nevezzük és $f(x) = \cos x$ módon jelöljük.)

Tulajdonságai:

értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R}$

értékkészlete: $R_f = [-1; 1]$

monotonitása:
- $[\pi + 2k\pi ; 2\pi + 2k\pi]$ intervallumon: szigorúan monoton növekvő
- $[2k\pi ; \pi + 2k\pi]$ intervallumon: szigorúan monoton csökkenő

$(k \in \mathbb{Z})$

zérushelye: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ (mivel $f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$.)

paritása: páros fgv (mivel $\cos(-x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

periódikusság: periódikus fgv. (mivel $\cos x = \cos(x + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$), periódusa: 2π.

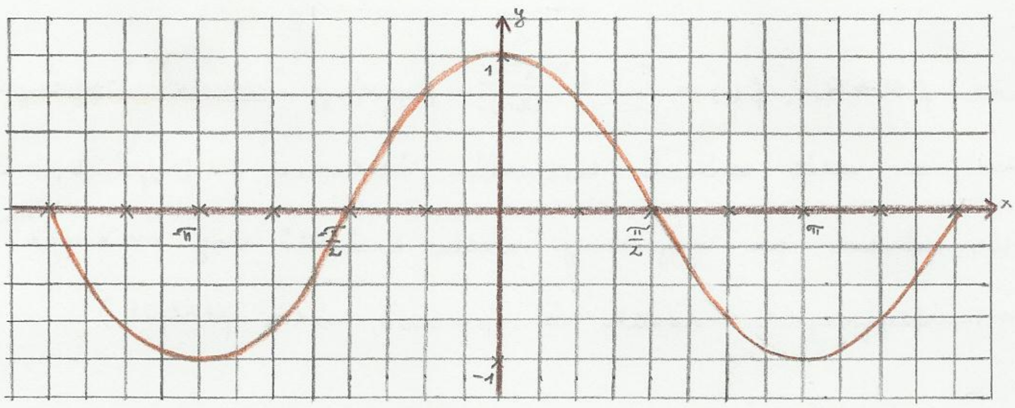
folytonosság: folytonos fgv.

korlátosság: korlátos fgv.
$k = -1$: pontos alsó korlát
$k = 1$: pontos felső korlát

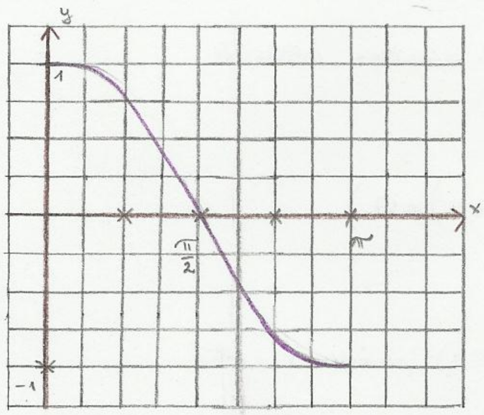
inverze: A cosinus fgv. $[0; \pi]$ intervallumra való leszűkítésének inverzét arkusz coszinusz függvénynek nevezzük, és „arccos"-sal jelöljük.

szélsőérték: minimuma és maximuma is van

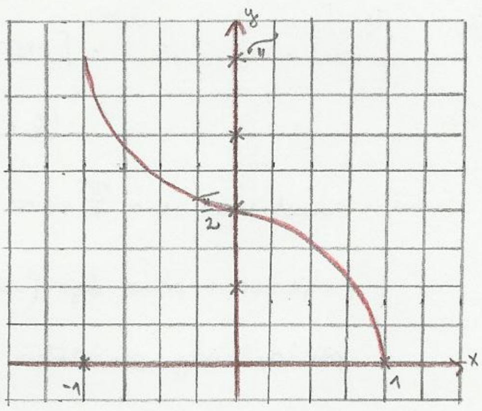
maximum helye: $x = 0° + k2\pi$ maximum értéke: $y = 1$, ahol $k \in \mathbb{Z}$
minimum helye: $x = \pi + k2\pi$ minimum értéke: $y = -1$, ahol $k \in \mathbb{Z}$



$f(x) = \cos x$



$f(x) = \cos x$ $D_f = [0; \pi]$



Inverze

$g(x) = \arccos x$

Déf.: Az $f: \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ függvényt tangens függvénynek nevezzük.

(Azt a $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ intervallumon értelmezett f függvényt, amely minden valós számhoz az ugyanennyi radián ívmértékű szög tangensét rendeli tangensfüggvénynek nevezzük, és $f(x) = tg\,x$ módon jelöljük.)

Tulajdonságai:

értelmezési tartománya: $D_f =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

értékkészlete: $R_f = \mathbb{R}$

asszimptota: $x = \pm\frac{\pi}{2}$ egyenletű egyenesek (mivel a fgv grafikonja soha nem éri el)

monotonitása: szigorúan monoton növekedő

szélsőértéke: nincs

zérushelye: $x = 0$ (mivel $f(0) = tg(0) = 0$)

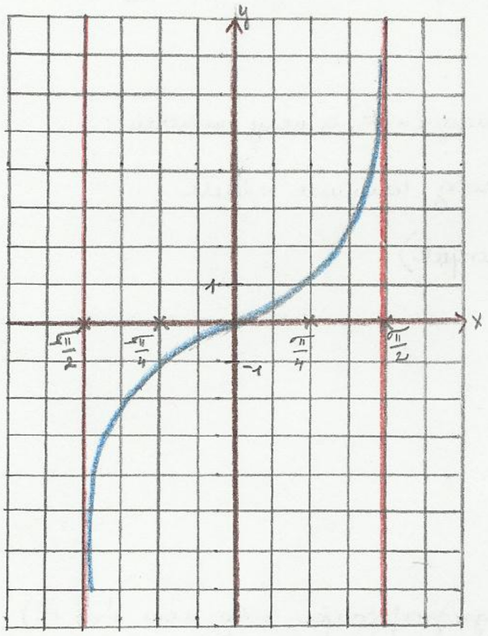
paritása: páratlan fgv (mivel $tg(-x) = -tg\,x$ $\forall x \in D_f$ esetén)

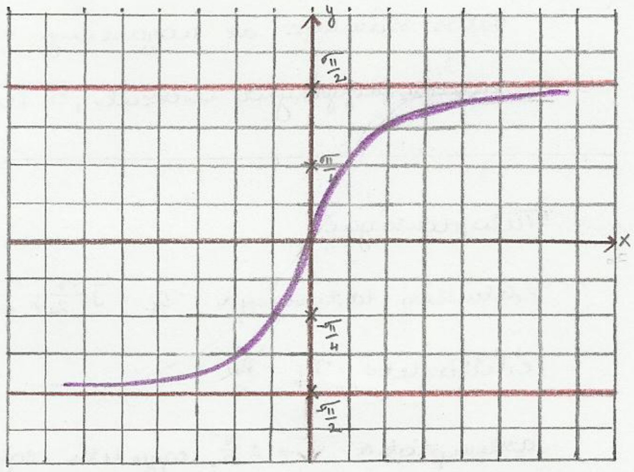
periódikusság: nem periódikus (az adott intervallumon)

folytonosság: az adott intervallumon folytonos fgv

korlátosság: nem korlátos fgv.

inverze: A tangens függvény $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ intervallumra való leszűkítésének inverzét arkusz tangens függvénynek nevezzük, és „arctg"-sel jelöljük.





Inverze

$f(x) = tg\,x$

$g(x) = arctg\,x$

Def.: Az $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ függvényt cotangens függvénynek nevezzük.

(Azt a $]0;\pi[$ intervallumon értelmezett f függvényt, amely minden valós számhoz az ugyanennyi radián ívmértékű szög kotangensét rendeli, cotangens-függvénynek nevezzük, és $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$ módon jelöljük.)

Tulajdonságai:

értelmezési tartománya: $D_f =]0;\pi[$

értékkészlete: $R_f = \mathbb{R}$

aszimptotái: $x = 0$; $x = \pi$ egyenletű egyenesek (mivel a fgv grafikonja soha nem éri el)

monotonitása: szigorúan monoton csökkenő

szélsőértéke: nincs

zérushelye: $x = \frac{\pi}{2}$ (mivel $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$)

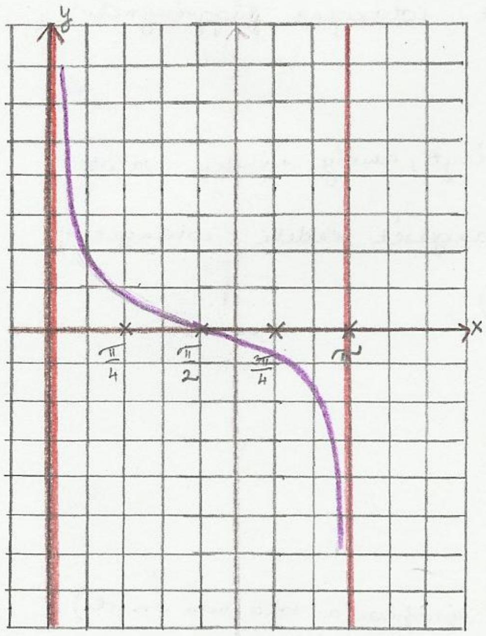
paritása: páratlan fgv (mivel $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$ $\forall x \in D_f$ esetén)

periódikusság: nem periódikus (az adott intervallumon) fgv

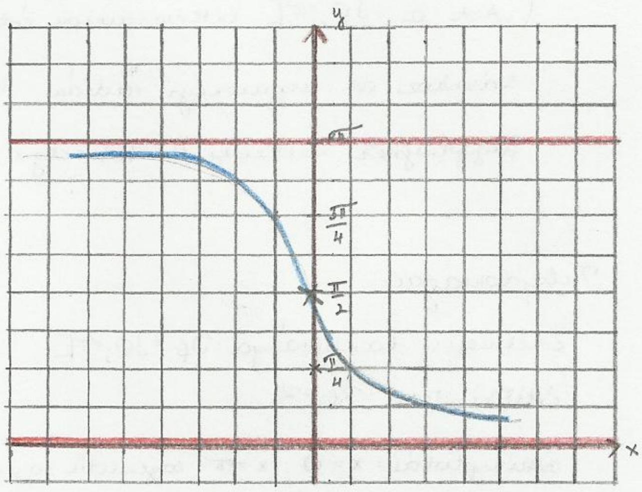
folytonosság: az adott intervallumon folytonos fgv

korlátosság: nem korlátos fgv.

inverze: A cotangens fgv $]0;\pi[$ intervallumra való leszűkítésének inverzét arkusz kotangens függvénynek nevezzük, és „arc ctg"-vel jelöljük.



$f(x) = ctg\, x$



Inverze

$g(x) = arcctg\, x$

Nevezetes szögek függvényértékei:

	$0°$	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$	$180° = \pi$	$270° = \frac{3\pi}{2}$	$360° = 2\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0
ctg	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0	/

Hatványozás azonosságai:

1, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

2, $a^x a^y = a^{x+y}$

3, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

4, $(ab)^x = a^x b^x$

5, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

6, $(a^x)^y = a^{xy}$

ahol: $a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge x, y \in \mathbb{R}$

Logaritmus azonosságai:

1, $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

2, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

4, $\log_a (x^y) = y \log_a x$ $(x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R})$

ahol: $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}^+$

Összefüggések egy szög különböző szögfüggvényei között:

a; $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

b; $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$

c; $\mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$

d; $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x = 1$

e; $1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

f; $1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

Két szög összegének és különbségének szögfüggvényei:

a; $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

b; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

c; $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$

d; $\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\beta \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\beta \pm \mathrm{ctg}\,\alpha}$

Két szögfüggvény összegének szorzattá alakítása:

a; $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$

b; $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cdot \sin\beta$

c; $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta$

d; $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha \cdot \sin\beta$

e; $\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$

f; $\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$

Kétszeres szögek és félszögek szögfüggvényei:

a; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

b; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

c; $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$

d; $\mathrm{ctg}\, 2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

Nagyon szép munka!

[illegible]