Tétel: $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

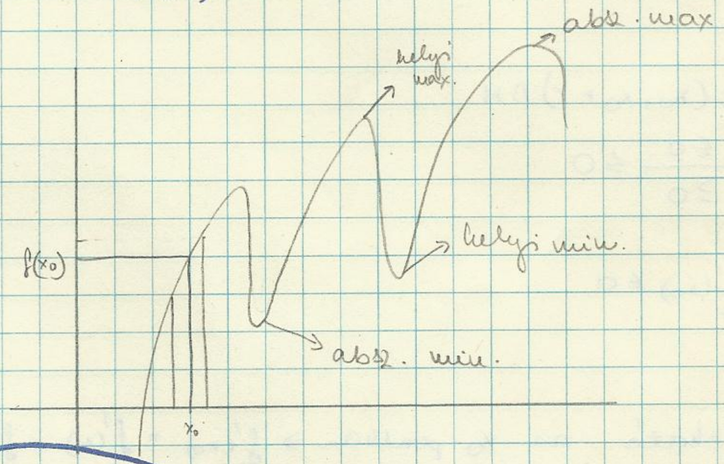
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

Biz: Hf.!

Def: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, $x_0$ belső pontja $H$-nak. Akkor mondjuk, hogy az $f$ fgv-nek az $x_0$ pontban helyi maximuma van, ha $\exists$ olyan $r \in \mathbb{R}_+$, úgy, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in S_r(x_0) \cap H$

Helyi minimuma van, ha $\exists \ldots r \in \mathbb{R}_+$, ú.h. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in S_r(x_0) \cap H$.




Tétel: (Darboux)

Ha $f: [A,B] \to \mathbb{R}$ differenciálható fgv., és $f'(a) \neq f'(b) \Rightarrow$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén, amely $f'(a)$ és $f'(b)$ által meghatározott intervallumban van, létezik $x_0 \in (a, b)$ úgy, hogy $f'(x_0) = \lambda$. (Bolzano-tételhez hasonló)

Biz: NEM KELL!

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$

$x_0$ belső pontja $H$-nak, és $f$ differenciálható $x_0$-ban

Ha az $f$ fgv-nek az $x_0$ pontban helyi szélsőértéke

van $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Mj.: szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Biz.: Tfh: $f$-nek $x_0$-ban helyi maximuma van

$\exists\ r \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in S_r(x_0) \cap H$

$$f = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$x \in (x_0 - r, x_0) \cap H \Rightarrow$ Válasszuk ezeket az „x"-eket

$$f(x) = \frac{\leq 0}{\leq 0} \geq 0$$

$$\lim_{\underset{\text{balról}}{x \to x_0 - 0}} f(x) = f'_-(x_0) \geq 0$$

Vegyük: $x \in (x_0, x_0 + r) \cap H$

$$f(x) = \frac{\leq 0}{\geq 0} \leq 0$$

$$\lim_{\underset{\text{jobbról}}{x \to x_0 + 0}} f(x) = f'_+(x_0) \leq 0$$

Mivel $f$ diff-ható az $x_0$ pontban $\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$

X. tétel

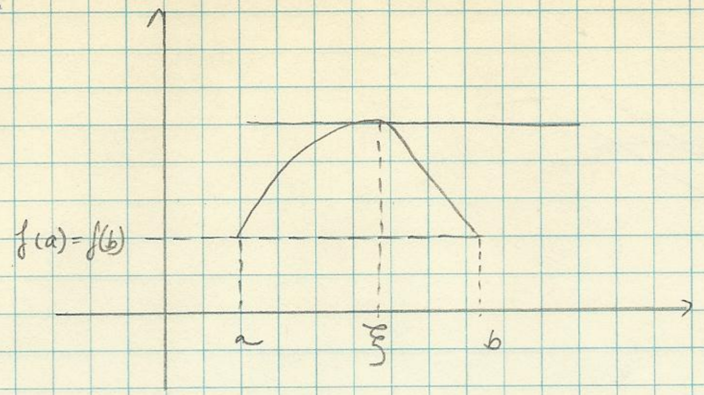
Tétel: (Rolle-tétel)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $(a,b)$-on differenciálható, az $[a,b]$-on folytonos, és a két végpontban $=$ a helyettesítési érték

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\ \xi \in (a,b) \text{ ú.h. } f'(\xi) = 0$$

$\xi$ kszi

Mj.:




Biz.: Ha $f: \underbrace{[a,b]}_{\text{kompakt}} \to \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2$ $f(x_1)=m$ (min)

$f(x_2)=M$ (max)

Ha $m=M$ (a végpontokban veszi fel a min-át, max-át) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=\text{const} \Rightarrow$ tetszőleges $\xi \in (a,b)$ esetén $f'(\xi)=0$

$m<M$, valamelyik szé-et az intervallum belsejében veszi fel.

$f'(\xi)=0$ ($\xi$ szé. hely)

Tétel: (Cauchy)

Ha $f$ és $g$ fgv $[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos fgv-ek, amelyek $(a,b)$ differenciálhatók $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ ú.h. $(f(b)-f(a))g'(\xi) =$
$=(g(b)-g(a))f'(\xi)$ Biz! 1950

Mj.: $g'(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in[a,b]$

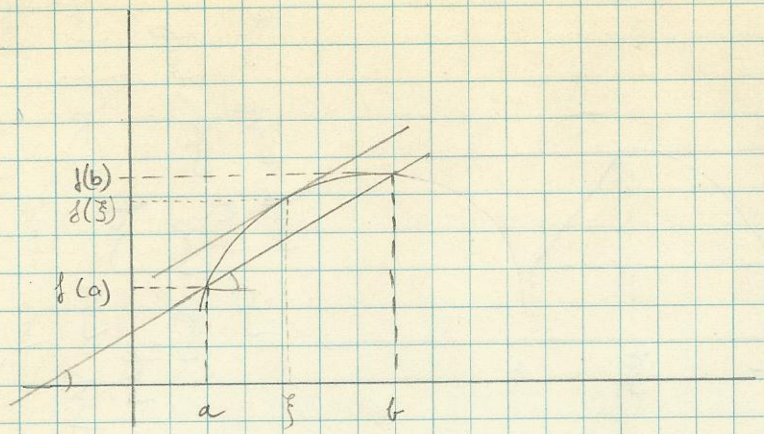
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$ következmény η éta

Tétel: (Lagrange)

Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folyt. fgv, amely $(a,b)$-n diff-ható $\Rightarrow$
$\exists\, \xi\in(a,b)$ ú.h. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Biz.: $g(x)=x$

13



f(b)
f(ξ)
f(a)
a
ξ
b

$\boxed{\text{XI.}}$ tétel

Tétel: (L'Hospital szabály)

$g, f : \langle a, b\rangle \Rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható fgv, $r \in \mathbb{R}^+$ $x_0 \in \langle a, b\rangle$,

$(x_0 - r, x_0) \subset \langle a, b\rangle$

Ha $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_0 - r, x_0)$ és $\frac{f'}{g'}$ fgvnek létezik

baloldali határértéke az $x_0$ pontban, és ez az $A \in \mathbb{R}$,

továbbá $f$-nek és $g$-nek $\exists$ baloldali határértéke $x_0$-ban

és mindkettő $0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ fgv-nek is $\exists$ határértéke, és az

egyenlő $A$-val.

Mj.: a, A tétel érvényes marad, ha baloldali határérték

helyett jobb oldali határérték ill. határérték szerepel.

b, A tétel akkor is érvényes, ha $x_0$ helyett $+\infty$ v. $-\infty$

szerepel, ill. a helyett v. $-\infty$ helyett szerepel.

c, „$\frac{0}{0}$", „$\frac{\infty}{\infty}$", „$0^0$", „$\infty - \infty$", „$\infty^\infty$"

Pl: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

„$\frac{0}{0}$" típus

$\lim\limits_{x \to 0+0} x^{\frac{2}{3\ln x + 1}} = \lim\limits_{x \to 0+0} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{2}{3\ln x + 1}} = \lim\limits_{x \to 0+0} {}^{\frac{2\ln x}{3\ln x + 1}}$

típusa: „$0^0$"

$\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{2\ln x}{3 \ln x + 1} \to \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{\cancel{\frac{1}{x}}\,2}{3\,\cancel{\frac{1}{x}}} = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+5}{6x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$\frac{\infty}{\infty}$

Biz.:

$\frac{f'}{g'}$ $x_0$-ban baloldali határérték: $A$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists r\in\mathbb{R} \quad \forall x\in(x_0-r, x_0) \quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon$$

Biz be!

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists r\in\mathbb{R}, \ \forall x\in(x_0-r, x_0) \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < A$$

$$F : [x_0-r, x_0] \to \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} f(x) = x - x_0 & x\neq x_0 \\ 0 - x_0 & x = x_0 \end{cases}$$

$$G : (x_0-r, x_0] \to \mathbb{R} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & x\neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

$F, G$ differenciálhatók $x\neq x_0$ $(x_0-r, x_0)$

$F, G$ folytonosak $(x_0-r, x_0]$

$F$ és $G$ fgv-ekre érvényesek a Cauchy tétel feltételei

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} - A\right| = \frac{F'(\xi_x)}{G'(\xi_x)} - A \left| = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \varepsilon$$

$\exists \xi_x \in (x, x_0)$

Ezt akarjuk ismételni bebizonyítani

$$\left|\frac{F(x)}{G(x)} - A\right| = \frac{f(x)}{f(x_0)}$$

## Tétel: (Taylor)

Legyen $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ és $f$ $(n+1)$-szer differenciálható. $\Rightarrow$ $\forall\, x \in (a,b)$ esetén $\exists\, \xi$ az $x$ és $x_0$ által meghatározott nyílt intervallumban úgy, hogy $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) +$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\substack{x_0\text{-hoz tartozó} \\ n\text{-dik Taylor} \\ \text{polinom}}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\substack{\text{Lagrange-féle} \\ \text{maradéktag}}}$$

Biz.: Cauchy-tétel segítségével

Pl.: $x_0 = 0$ (Maclaurin polinom) (másodrendű)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad \cos 0 = 1$

$(\sin x)'' = -\sin x$ $\qquad -\sin 0 = 0$

$(\sin x)''' = -\cos x$ $\qquad -\cos 0 = -1$

$(\sin x)'''' = \sin x$ $\qquad \sin 0 = 0$

$$\sin(x) = \underbrace{0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \dots}\ + \underbrace{R_6(x)}_{\text{Lagrange-f maradéktag}}$$

$$R_n(x) = \left| \frac{\pm \sin/\cos\, \xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}(0{,}1)^{n+1}$$

Ha $n = 6$.

$\Downarrow$

$$\frac{1}{7!}\, 0{,}1^7 = \frac{10^{-7}}{7!} < 10^{-10}$$

Tételek:

1, Valós fgv-ek folytonossága (átviteli elv, jeltartás)

2, Kompakt halmazok, folytonos fgv-ek (Bolzano-tétel)

3, Valós fgv-ek határértéke (átviteli elv)

4, Határérték a végtelenben; végtelen, mint határérték; monoton fgv-ek

5, Fgv-sorozatok, fgv-sorok

6, Hatványsorok

7, Elemi fgv-ek

8, Differenciálszámítás

9, Elemi fgv-ek differenciálhányadosai (inverz fgv differenciálása)

10, Középérték (Lagrange, Cauchy, Rolle)

11, L'Hospital-, Taylor-tétel; Taylor-sor + erre vonatkozó tételek

12, Differenciálható fgv-ek szélsőértéke és monotonitása (monoton növ, monoton csökk). 20%

Könyvből: konvexitásig!

11.61
11.62 tétel
sze: 11.64 T
11.66 T

# 4. tétel

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ torl. pontja $H$-nak. Az $f$ fgv határértéke $x_0$-ban $+\infty$, ha minden $K$ valós számhoz $\exists\ \delta(K) \in \mathbb{R}^+$, úh minden $x \in H$, $0 < |x - x_0| < \delta(K)$ esetén $f(x) > K$.

Tétel: ! $H \subset \mathbb{R}$ alulról nem korlátos, és $f: H \to \mathbb{R}$. Az $f$ fgv-nek $-\infty$ létezik határértéke, ha $\exists$ olyan $y_0 \in \mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon > 0$ $(\in \mathbb{R})$ $\exists$ olyan $K(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, úh. minden $x \in H$, $x < K(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Tétel: ! $H \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, és $f: H \to \mathbb{R}$. Az $f$ fgv határértéke $+\infty$-ben $+\infty$, ha $\forall\ K \in \mathbb{R}$-hez $\exists$ olyan $\delta(K) \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in H$, $x > \delta(K)$ esetén $f(x) > K$

Tétel: (Átviteli-elv) ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, $x_0, y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0$ torl. pontja $H$-nak

a, Ha $x_0 = +\infty$ vagy $x_0 = -\infty$, úgy az $f$ fgv-nek $x_0$-ban $\Leftrightarrow$ $\exists$ határértéke, ha minden $x_0$-hoz divergáló $\langle x_n \rangle: \mathbb{N} \to H$ sorozat esetén az $\langle f(x_n) \rangle$ sorozat konvergens. A fenti $\langle f(x_n) \rangle$ sorozatok mindegyike az $f$ $x_0$-beli határértékéhez konvergál.

b, Ha $y_0 = +\infty$ vagy $y_0 = -\infty$, úgy az $f$ fgv határértéke $x_0$-ban $\Leftrightarrow$ $y_0$, ha minden $\langle x_n \rangle: \mathbb{N} \to H \setminus \{x_0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ tulajdonságú sorozat esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$

# 1+ 9. tétel

Cauchy-f középérték tétel BIZ.:

! $F: [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) := (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$

Ekkor $F$ diff-ható $(a,b)$-n és folytonos $[a,b]$-n, továbbá $F(a) = F(b)$, így a Rolle-t szerint: $\exists\ \xi \in (a,b)$, melyre $F'(\xi) = 0 \Rightarrow$ állítás első fele.

Ha $g'(x) \neq 0$ $\forall\ x \in (a,b)$ esetén $\Rightarrow$ Rolle-tétel miatt $g(b) - g(a) \neq 0 \Rightarrow$

$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi)$ felírható:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

# 12. tétel

Tétel: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, $\langle a,b \rangle \subset H$, és $f$ diff-ható $\langle a,b \rangle$-n

a, Az $f$ fgv $\Leftrightarrow$ monoton növekvő $\langle a,b \rangle$-n, ha $f'(x) \geq 0$ $\forall$ $x \in \langle a,b \rangle$ esetén

b, Az $f$ fgv $\Leftrightarrow$ monoton csökkenő $\langle a,b \rangle$-n, ha $f'(x) \leq 0$ $\forall$ $x \in \langle a,b \rangle$ esetén.

Biz: a, $\Rightarrow$ ! $f$ mon növekvő és $x_0 \in \langle a,b \rangle$. Mivel $f$ mon nő $\Rightarrow$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ $\forall$ $x \in \langle a,b \rangle$, $x \neq x_0$ esetén, így a jeltartás tétele alapján $f'(x_0) \geq 0$

$\Leftarrow$

! $x,y \in \langle a,b \rangle$, $x<y$. A Lagrange-f középérték tétel szerint $\exists$ olyan $\xi \in (x,y)$, amellyel $f(y)-f(x) = f'(\xi)(y-x)$, így $f'(\xi) \geq 0$ és $y-x>0$ miatt $f(x) \leq f(y)$, azaz $f$ monoton növekvő.

Tétel: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, $\langle a,b \rangle \subset H$ és $f$ diff-ható $\langle a,b \rangle$-n.

a, Az $f$ fgv szig mon nő $\langle a,b \rangle$-n $\Leftrightarrow$, ha $\forall$ $x \in \langle a,b \rangle$ esetén $f'(x) \geq 0$, és $\nexists$ $\langle c,d \rangle \subset \langle a,b \rangle$, hogy $f'(x)=0$ $\forall$ $x \in \langle c,d \rangle$ pontban.

b, Az $f$ fgv szig mon csökk $\langle a,b \rangle$-n $\Leftrightarrow$, ha $f'(x) \leq 0$ $\forall$ $x \in \langle a,b \rangle$ esetén, és $\nexists$ $\langle c,d \rangle \subset \langle a,b \rangle$, hogy $f'(x)=0$ minden $x \in \langle c,d \rangle$ pontban.

Tétel: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, $x_0$ belső pontja $H$-nak, és tfh: $f$ diff az $x_0$ $r$ sugarú környezetében.

a, $f'(x) \leq 0$ $(x_0-r, x_0)$-on és $f'(x) \geq 0$ $(x_0, x_0+r)$-en $\Rightarrow$ $f$-nek $x_0$-ban helyi minimuma van.

b, Ha $f'(x) \geq 0$ $(x_0-r, x_0)$-on és $f'(x) \leq 0$ $(x_0, x_0+r)$-en $\Rightarrow$ $f$-nek $x_0$-ban helyi maximuma van.

Tétel: ! $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, $x_0$ belső pontja $H$-nak, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tfh: $f$ $S_r(x_0)$-ben $(n-1)$-szer, $x_0$-ban pedig $n$-szer diff-ható, és

$$f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ de } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Ha $n$ páratlan $\Rightarrow$ $f$-nek $x_0$-ban $\nexists$ szélsőértéke, míg ha $n$ páros $\Rightarrow$ $f^{(n)}(x_0)>0$ esetén $f$-nek $(x_0)$-ban (szigorú) helyi minimuma, $f^{(n)}(x_0)<0$ esetén (szigorú) helyi maximuma van.

Biz: Taylor-t.-el.