8. tétel

1. előadás

IX.15.

ABC-k, szavak, nyelvek

Def.: Egy (általában véges), nem üres halmazt **ABC**-nek nevezünk. Jele nagy betű, pl: *A*,*B*.

Def.: Egy A ABC-t, mint halmazt alkotó elemeket **jeleknek** (karaktereknek, betűknek) nevezzük. Jele kis betű, pl: *a*,*b*.

Def.: Egy *A* ABC jeleiből alkotott kifejezéseket az **A ABC fölötti szónak** (sztringnek) nevezzük. Jele kis görög betű. Pl: α. Az $\alpha << A$ egy *A* abc fölötti szót jelent.

Def.: Egy A ABC fölötti **α szó hosszán** az őt alkotó jelek számát értjük. Jele: $L(\alpha)$ vagy $d(\alpha)$.

Def.: Egy A ABC fölötti ε szót **üres szónak** nevezzük, ha $L(\varepsilon)=0$.
Megj.: Vagyis ha a szó hossza nulla. Az üres szó jele általában ε.

Műveletek szavakkal

Def.: Egy A ABC fölötti α és β szavak konkatenációján azt a γ A ABC fölötti szót értjük, melyet úgy kapunk, hogy az α szót alkotó jelek mögé írjuk a β szót alkotó jeleket. A konkatenáció jele a +.

Megj.: Vagyis ha pl: α="alma" és β="fa" akkor $\alpha+\beta$ = "almafa".

Konkatenáció tulajdonságai

asszociatív	, vagyis $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+\beta+\gamma$
nem kommutatív	, vagyis $\alpha+\beta \neq \beta+\alpha$
van egységelem	, vagyis $\alpha+\varepsilon = \varepsilon+\alpha = \alpha$

Szavak hatványozása

Legyen adva egy $\alpha << A$ (A ABC fölötti α szó).

Def.: $\alpha^0 = \varepsilon$ (Bármely szó nulladik hatványa az üres szó)

Def.: $\alpha^n = \alpha + \alpha^{n-1}$ $(n \geq 1)$ (Bármely szó n. hatványa nem más, mint a szó n-szeres konkatenációja) szókezdő részszó szó záró részszó

Prefixum, szuffixum

- **Def.**: Ha $\alpha=\beta+\gamma$ akkor a β szót az α szó **prefixumának** (szókezdő részszó) nevezzük.

- **Def.**: Ha $\alpha=\beta+\gamma$ és $\beta\neq\varepsilon$, akkor a β szót az α szó **valódi prefixumának** nevezzük.

- **Def.**: Ha $\alpha=\beta+\gamma$ akkor a γ szót az α szó **szuffixumának** (szó záró részszó) nevezzük.

- **Def.**: Ha $\alpha=\beta+\gamma$ és $\gamma\neq\varepsilon$ akkor a γ szót az α szó **valódi szuffixumának** nevezzük.

Műveletek ABC-kel : *komplexus szorzás*

- **Def.:** Ha *A* és *B* két ABC, akkor $A \odot B := \{ ab \mid a \subseteq A,\ b \subseteq B\}$. Ezt a műveletet **komplexus szorzás**nak hívják.

Példa

Pl.: **A:={ a,b }, és B:={0,1}. Legyen C := A ⊙ B = {a0,a1,b0,b1}.**
α="a0b0a1", és L(α)=3

"a0aba1" nem lehet a C *ABC* feletti szó!

$D = \{a, b, 0, 1\}$

$C = \{a0, a1, b0, b1\}$

$\alpha = $ " a0 b0 a1 "

$L(\alpha)_D = 6$ db $\qquad\qquad L(\alpha)_C = 3$ db

$\Downarrow$

D abc fölött

Műveletek ABC-kel : *hatványozás*

- Legyen adva egy "A" ABC.

Def.: $A^0 := \{ \varepsilon \}$, vagyis minden **ABC nulladik hatványa** az a halmaz, amelynek egyetlen eleme van, az üres szó.

Def.: $A^n := A \odot A^{n-1}$ ahol $n \geq 1$. Vagyis egy **ABC n-edik hatványán** az n-szeres komplexus szorzatát értjük.

Példa

Pl: ***A = { a, m }*** $\quad$ ***A^2 = { aa, am, ma, mm }***

- *Megj.: Ez alapján pl. az "A" ABC harmadik hatványa egy olyan ABC, amelynek minden eleme igazából három karakterből áll. Általánosan: az n-edik hatványa egy olyan ABC, melynek minden eleme n karakter hosszú.*

Műveletek ABC-kel : lezárt

Def.: $V{:=}\{ \alpha \mid \alpha << A$ és $L(\alpha)=1 \}$. *Vagyis legyen a "V" halmaz az "A" ABC fölötti* ***egy hosszú szavak halmaza.*** *Jele: $V^{*1} << A$*

Def.: A V halmazon értelmezett **kontextusos szorzás**

V⊕V$:=\{ \alpha\beta \mid \alpha \in V$ és $\beta \in V\}$ műveletén azt a szavakból álló halmazt értjük, amelyeket a meglévő szavakból kapunk úgy, hogy mindegyiket mindegyikkel összefűzzük.

Megj.: A V halmazt valójában az 1 hosszú szavak alkotják. A V⊕V halmazt valójában a **kettő hosszú szavak** alkotják.

Def.: $V^0 := \{ \varepsilon \}$, és $V^n := V \oplus V^{n-1}$ $(n \geq 1)$. A hatványozás művelete.

Def.: A $V^* := \bigcup_{i=0}^{\infty} V^i = V^0 \cup V^1 \cup V^2 \cup \ldots$ halmazt a "V" **lezártjának** nevezzük.

Megj.: Vagyis elemei a nulla hosszú szó, az egy hosszú szavak, a kettő hosszú szavak, stb...

Def.: A $V^+ := \bigcup_{i=1}^{\infty} V^i = V^1 \cup V^2 \cup V^3 \cup \ldots$ halmazt a "V" **pozitív lezártjának** nevezzük.

Megj.: vagyis $V^* = V^+ \cup \{ \varepsilon \}$,

Megj.: a V+ elemei az egy hosszú szavak, a kettő hosszú szavak, stb., így V+-nak nem eleme az üres szó !

2. előadás

IX. 22.

Pl.: ha V:={'a','b'}. Akkor

$V*=\{\varepsilon,'a','b','aa','ab','ba','bb','aaa','aab',\ldots\}$.

és $V+=\{\ 'a','b','aa','ab','ba','bb','aaa','aab',\ldots\}$.

Pl.: az $\alpha \in V*$ azt jelenti, hogy α egy tetszőleges hosszú szó, $L(\alpha) \geq 0$.

Pl.: az $\alpha \in V+$ azt jelenti, hogy α egy tetszőleges hosszú szó, de nem lehet üres szó, vagyis $L(\alpha) \geq 1$.

Pl.: ha V={ 0, 1 }, ekkor a $V*$ a bináris számok halmaza (és benne van az ε is !).

Pl.: ha V={ 0 }, W= { 1 }, ekkor a $(V \cup W)* = \{ (01)^n \mid n \in N \}$.

Formális nyelv

Def.: Legyen $V^{*1} << A$. Egy $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}*$ halmazt az "A" ABC fölötti **formális nyelvnek** nevezzük.

Megj.: Vagyis a formális nyelv nem más, mint egy adott ABC jeleiből alkotott tetszőleges hosszú szavak halmazának részhalmaza, vagyis a formális nyelv egy adott ABC jeleiből alkotható, meghatározott szavak halmaza.

Megj.: A formális nyelv állhat véges sok szóból, állhat végtelen sok szóból és tartalmazhatja az üres szót is.

Pl.: A:={a,b}, V^{*1}<<A. Ekkor az L:={'a','ab','abb','abbb','abbbb',...} nyelv egy "A" ABC fölötti formális nyelv, mely végtelen sok szót tartalmaz ('a'-val kezdődő, tetszőleges sok 'b'-vel folytatódó szavakból alkotott nyelv).