4. tétel

A komplex számok teste. Műveletek algebrai alakú komplex számokkal. Komplex szám konjugáltjának és abszolút értékének fogalma és tulajdonságai.

Def.: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-ben az összeadást ill. a szorzást így értelmezzük

$$(a;b)+(c;d) := (a+c;\ b+d)$$
$$(a;b)\cdot(c;d) := (a\cdot c - b\cdot d;\ a\cdot d + b\cdot c)$$

Tétel: $(\mathbb{R}\times\mathbb{R};+;\cdot)$ test

Biz.: testaxiómák

$$\oplus : (\mathbb{R}\times\mathbb{R};+)\ \left.\begin{array}{l} \text{kommutatív } \checkmark \\ \text{asszociatív } \checkmark \\ \exists \text{ neutrális elem } (0;0)\ \checkmark \\ (a;b) \text{ additív inverz } (-a;-b)\ \checkmark \end{array}\right\} \text{modulus}$$

Az összeadás ill. a szorzás kommutativitása, asszociativitása, valamint a disztributivitás egyszerű számolással igazolható.

Az összeadás invertálhatósága az $(a;b)+(x;y)=(a+x;\ b+y)=(c;d)$ egyenlet alapján az $a+x=c$; $b+y=d$ egyenletek megoldásaival ekvivalens. Ezek a valós számok testében megoldhatók, ezért az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-ben az összeadás invertálható, és a megoldása

$$(x;y) = (c-a;\ d-b)$$

$\odot : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,;\,\cdot)$ kommutatív ✓

asszociatív ✓

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0;0\}\,;\,\cdot)$ csoport

egységelem : $e=(1;0)$

$$(a;b)\,(1;0) = (\underbrace{a\cdot 1 - b\cdot 0}_{a}\,;\,\underbrace{a\cdot 0 + b\cdot 1}_{b})$$

$$(a;b)\neq(0;0)$$

$$(a;b)\cdot(a';b') = (1;0)$$

$$(aa'-bb'\,;\,ba'+ab') = (1;0)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} a\cdot a' - bb' &= 1 \\ b\,a' - ab' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$a' = \ldots \quad b' = \ldots$ ✓

Az additív zérus a $(0;0)$ számpár.

Végül tekintsük az $(*)\,(a;b)(x;y) = (c;d) \quad ((a;b)\neq(0;0))$ egyenletet.

A szorzás elvégzése után látható, hogy ez az egyenlet a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\begin{cases} ax - by = c \\ bx - ay = d \end{cases}$$

Az $(a;b)\neq(0;0)$ feltétel miatt $a^2+b^2\neq 0$, és így az egyenletrendszer megoldható:

$$x = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} \quad ; \quad y = \frac{ad-bc}{a^2+b^2}$$

Az így kapott $(x;y)$ számpár tehát megoldása a $(*)$ egyenletnek.

$\odot$ disztributív az $\oplus$-ra nézve. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. Tehát az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ test.

Az $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,;+;\cdot)$ test $(a;b)$ elemét a következő alakban írhatjuk fel:

$$(a;b) = (a;0) + (b;0)(0;1)$$

Könnyen bebizonyítható, h. az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$-nek az $(a;0)$ alakú elemeiből álló $\mathbb{R}_1$ részhalmaza a $(a;b)+(c;d) := (a+c\,;\,b+d)$ és az

$(a;b)(c;d) := (ac-bd; ad+bc)$ műveletek szerint testet alkot, azaz $(\mathbb{R}_1; +; \cdot)$ test, amely izomorf a valós számok $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ testével.

Tétel: $(\mathbb{R}_1; +; \cdot) \cong (\mathbb{R}; +; \cdot)$

$f: \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R} \quad ((a;0) \mapsto a)$

izomorfia: bijektív legyen a leképezés, homomorf legyen az $\oplus$-ra és a $\odot$-ra nézve

Az $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}; +; \cdot)$ testben ezen izomorfizmus alapján cseréljük ki az $(\mathbb{R}_1; +; \cdot)$ testet az $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ testtel, és a $(0;1)$ számpár helyett írjunk i-t. Az így kapott testet jelölje $(\mathbb{C}; +; \cdot)$, amelynek elemei az elmondottak szerint:

$$\underset{z}{(a;b)} = \underset{a}{(a;0)} + \underset{b}{(b;0)}\,\underset{i}{(0;i)} \quad \text{izomorfia alapján}$$

$z = a + bi$ komplex szám algebrai alakja

$$z = a + bi = \underbrace{a}_{\text{valós rész}}\,\underbrace{1}_{\text{valós egység}} + \underbrace{b}_{\text{képzetes rész}}\,i \quad \text{(valós tag: } a\cdot 1\text{; képzetes tag: } bi\text{)}$$

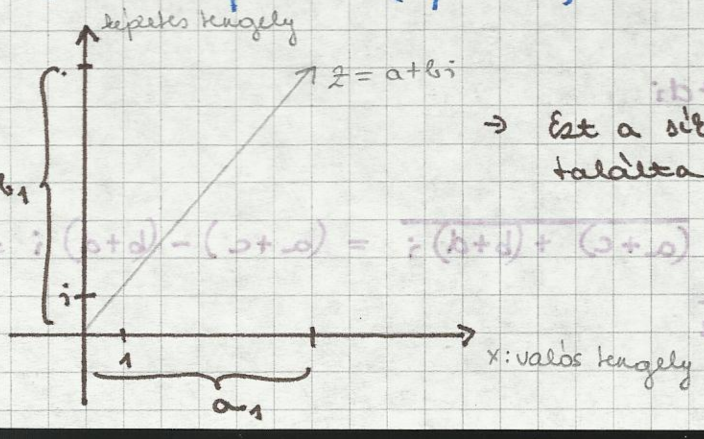
$i \leftarrow$ képzetes (imaginárius) egység $\qquad i^2 = -1$

A kapott $(\mathbb{C}; +; \cdot)$ testet nevezzük a komplex számok testének, elemeit pedig komplex számoknak.

„i": $\quad z_1 = a + bi \qquad z_1 \cdot z_2 = \underbrace{ac + bd\,i^2}_{i^2=-1} + (ad + bc)\,i$

$\qquad z_2 = c + di$

felhasználjuk: $(a;b)(c;d) := (ac - bd; bc + ad)$



$\Rightarrow$ Ezt a síkot hívják **Gauss-sík**nak (mert Gauss találta ki a komplex számokat).

A komplex szám elnevezést indokolja, hogy minden komplex szám két tag, mégpedig egy valós és egy képzetes tag összege.

Komplex számok között műveleteket végzünk el:

$$(a+bi)+(c+di):=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di):=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

A $z=a+bi$ alakú számokkal formálisan úgy számolhatunk, mint a valós kéttagú kifejezésekkel, csak i^2 helyett kell -1-et írni.

A komplex szám additív inverze: $-z=-a-bi$

Ha $z\neq 0 \Rightarrow$ multiplikatív inverze: $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$

pl.:

$(7-3i)+(-4+2i)=3-i \; (=(7-4)+(-3+2)i)$

Def.: A $z=a+bi$ komplex szám konjugáltján, amit $\overline{z}$ jelöl, a $\overline{z}=a-bi$ komplex számot értjük.

A z komplex számra teljesülnek:

$\overline{\overline{z}}=z$

$\overline{z}=z \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

Tétel: A z_1, z_2 komplex számra érvényesek:

1., $z_1=z_2 \Leftrightarrow \overline{z_1}=\overline{z_2}$

11., $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

111., $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

Biz: Legyen $z_1=a+bi$; $z_2=c+di$

1., közvetlenül leolvasható

11., $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i=$

$=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

III., $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} =$

$= (ac-bd)-(ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

IV., $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

V., $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 = 0)$

VI., $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

VII., $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$; $z - \bar{z}$ képzetes szám

VIII., $z\bar{z} \in \mathbb{R}$

Def.: A $z = a+bi$ komplex szám abszolút értékét (amit $|z|$-vel jelölünk) a $|z| := \sqrt{a^2+b^2}$ (≥ 0) értéket értjük.

A következőkben, ha c nemnegatív valós szám $\Rightarrow$ $\sqrt{c}$ mindig a nemnegatív négyzetgyököt jelenti.

A definícióból nyilvánvaló, hogy az abszolút értékre $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ teljesül. Ebből is következik, hogy $|\bar{z}| = |z|$

Tétel: A komplex számok abszolút értékeire teljesülnek a következők:

I., $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

II., $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

III., $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

IV., $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{z_1}{z_2} \quad (z_2 \neq 0)$

BIZ.: I., egyenlőtlenség ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

$$(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \leq z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + 2|z_1||z_2|$$

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leq 2|z_1||z_2|$$

Ez utóbbi igaz, ha igaz a

$$(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)^2 \le 4\,|z_1|^2|z_2|^2 = 4\, z_1\bar{z}_1\, z_2\bar{z}_2 \quad \text{egyenlőtlenség.}$$

Ez az egyenlőtlenség pedig ekvivalens a $(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)^2 = (z_1\bar{z}_2 - \overline{z_1\bar{z}_2})^2 \le 0$ egyenlőtlenséggel. Minthogy a zárójelben képzetes szám áll, ezért igaz ez az egyenlőtlenség és ezzel együtt a kiindulási egyenlőtlenség is.

II., Az (1)-es egyenlőtlenségben z_1 helyett írjuk $z_1 - z_2$-t. ⇒

⇒ $|z_1| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$ azaz $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

Cseréljük fel z_1 és z_2 szerepét ⇒ $|z_2 - z_1| \ge |z_2| - |z_1|$

Az utóbbi két egyenlőtlenségben a bal oldalak egyenlők egymással, a jobb oldalak viszont előjelben eltérnek egymástól. Ezért a bal oldalon álló érték nem kisebb a jobb oldalon álló nemnegatív értékű tagnál sem, azaz $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$, ami bizonyítandó volt.

III., $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1\bar{z}_1 \cdot z_2\bar{z}_2} = \sqrt{z_1\bar{z}_1}\cdot\sqrt{z_2\bar{z}_2} = |z_1|\cdot|z_2|$

IV., $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{\dfrac{z_2}{z_1}\left(\overline{\dfrac{z_2}{z_1}}\right)} = \sqrt{\dfrac{z_2\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_1}} = \dfrac{\sqrt{z_2\bar{z}_2}}{\sqrt{z_1\bar{z}_1}} = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}$