3. tétel

Halmazok számossága. A természetes szám, mint számosság, műveletek természetes számokkal, rendezés. Teljes indukció.

H kölcsönösen egyértelműen leképezhető K-ra $(H, K \in A)$, azaz $\exists$ a H halmaz bijektív leképezése K-ra. Jel: $H \cong K$

Ez a reláció A-n ekvivalenciareláció, teljesülnek.

1, $\forall H (H \cong H)$ H identikus leképezése bijektív (reflexivitás)

2, $\forall H \forall K (H \cong K \Rightarrow K \cong H)$ bijektív leképezésnek $\exists$ inverze, és az is bijektív. (szimmetricitás)

3, $\forall H \forall K \forall L ((H \cong K \wedge K \cong L) \Rightarrow H \cong L)$ bijektív leképezések szorzata bijektív (tranzitivitás)

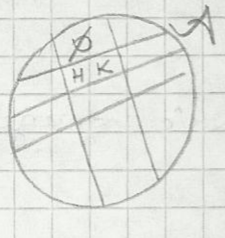
Def.: Egy H halmaz számosságát (amit $|H|$ jelöl) a köv. módon definiáljuk:

$$|H| := \{x \mid x \in A \wedge x \cong H\}$$

$$\Downarrow$$

$$|H| = |K| \Leftrightarrow H \cong K$$

MAGYARÁZAT:



azért esnek be az ekvivalencia osztályába, mert van közöttük bijektív leképezés. Közös az összesben, ti. ekvivalens.

$H \simeq K$ helyett: $H \cong K$.

↳ $H \neq K$-val, hanem H ekvivalens K-val. (Nem egyenlőek, csak ugyanannyi eleme van, mert van közöttük bijekció.)

pl.: $|\{a,b\}| := 2$ Az összes olyan halmaz, amelynek annyi eleme van, mint ennek, legyen 2.

$|\emptyset| := 0.$

$|\{\emptyset\}| := |\{a\}| = |\{!\}| := 1.$

Természetes szám, mint számosság:

Def.: Dedekind (1831-1916) - féle definíció:

A H halmaz véges, ha egyetlen valódi részhalmazával sem ekvivalens. Ellenkező esetben a halmaz végtelen. Véges halmazok számosságát TERMÉSZETES SZÁM-nak nevezzük.

(MÁSKÉPP: A halmaz véges, ha $\forall f: H \Rightarrow H$ injektív leképezés szürjektív $\Rightarrow$ tehát bijektív)

Tétel: Véges halmaz $\forall$ részhalmaza véges.

BIZ.: Tfh: H valamely H' részhalmaza végtelen. $\Rightarrow \exists$ olyan $I_f(H')$ (H' halmaz önmagába való f injektív leképezése), amelynek van indítópontja. $\Rightarrow H \setminus H'$ olyan $I_f(H)$-t kapunk, amelynek van indítópontja. $\Rightarrow$ H végtelen ↯ $\Rightarrow$ A TÉTEL IGAZ!

Tétel: Két véges halmaz egyesítése is véges.

Def.: Ha $m = |M|$ és $|K| = k$ term. szám $\Rightarrow$ ezek $m+k$ összegét ill. mk szorzatát a köv. módon értelmezzük.

$\oplus$: $m + k := |M \cup K|$ $(M \cap K = \emptyset)$

$\odot$: $mk := |M \times K|$

3/21

Def.: Ha $n = |M|$, $k = |K|$ egyidejűleg nem zérus term. szám, $\Rightarrow$ az n szám k-adik hatványán a következőt értjük.

$$n^k := |M^k|$$

Két term. szám összege, szorzata, valamint (ha nem mindkettő zérus, akkor) hatványa is term. szám, és teljesülnek az alábbi azonosságok

$$\left.\begin{aligned} n + k &= k + n \\ n k &= k n \end{aligned}\right\} \text{ kommutativitás}$$

$$\left.\begin{aligned} (n+k)+l &= n+(k+l) \\ (nk)\,l &= n\,(kl) \end{aligned}\right\} \text{ asszociativitás}$$

$$(n+k)\,l = nl + kl \qquad \text{disztributivitás}$$

$$n + 0 = n$$
$$n \cdot 1 = n$$
$$n\,0 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} n^k n^l &= n^{k+l} \\ (nk)^l &= n^l k^l \\ (n^k)^l &= n^{kl} \\ n^0 &= 1 \\ 0^n &= 0 \qquad (n \neq 0) \\ n^1 &= n \\ 1^n &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ hatványozás azonosságai}$$

Természetes számokra érvényesek a következők:

$$n + l = k + l \iff n = k$$

$$nl = kl \iff n = k \qquad (l \neq 0)$$

$$n + k = 0 \iff n = 0 \wedge k = \text{[illegible]} - n$$

$$nk = 0 \iff n = 0 \vee k = 0$$

Ha $m \neq 0 \Rightarrow$ létezik egy olyan n term. szám, hogy
$m = n+1$.

Két tetszőleges H, K véges halmazra a következő 3 állítás közül pontosan az egyik igaz.

a, $H \cong K$

b, $\exists\ H'(\subset H)$, hogy $H' \cong K$, de $H \not\cong K$

c, $\exists\ K'(\subset K)$, h. $H \cong K'$, de $H \not\cong K$.

Az m és k term. számra az alábbiak közül pontosan az egyik teljesül:

a, $m = k$

b, $\exists\ l(\neq 0)$ term. szám, h. $m = k + l$

c, $\exists\ l'(\neq 0)$ term. szám, h. $m + l' = k$

Def.: $m \leq k :\Leftrightarrow \exists\, l\ (l \in \mathbb{N} \wedge m + l = k)$,

$m < k :\Leftrightarrow (m \leq k \wedge m \neq k)$

Tétel: A term. számok halmaza a $\leq$ reláció szerint rendezett.

BIZ.:

$m < k$, $m = k$, $m > k$

ezek közül pontosan az egyik teljesül, ami a trichotómia fennállását jelenti.

A $m < k$ és $k < l$ def. azt jelenti, h $\exists\ r(\neq 0)$, ill. $s(\neq 0)$ term. szám, hogy $m + r = k$, $k + s = l$, ahonnan

$m + (r+s) = l$ (ahol $r+s$ nem zérus szám)

$\Downarrow$

$m < l$.

$\Downarrow$

állítás

Term. számokra érvényesek a következők:

$$m \le k \Leftrightarrow m+l \le k+l$$

$$m \le k \Leftrightarrow ml \le kl$$

$$(m \le k \wedge n \le l) \Rightarrow m+n \le k+l$$

$$(m \le k \wedge n \le l) \Rightarrow mn \le kl$$

Igazak a köv. állítások:

- 0 a legkisebb term. szám.
- Az N-ben bevezetett rend. reláció szerint n és $n+1$ között nincs természetes szám, azaz az n term. számot követő legközelebbi term. szám az $n+1$.
- Ha M ($\subseteq \mathbb{N}$) olyan halmaz, amelyre teljesül egyidejűleg az alábbi két feltétel:

  a; $0 \in M$

  b; ha $k \in M \Rightarrow k+1 \in M$, $\Rightarrow M = \mathbb{N}$
- Term. számok bármely nem üres halmazában van egy legkisebb

Peano-féle axiómarendszer:

I. A 0 term. szám

II. $\forall$ n term. számhoz $\exists$ egy egyértelműen meghatározott n-re rákövetkező n' term. szám.

III. Nincs olyan term. szám, amelyre rákövetkező a 0.

IV. Ha $m' = n'$ $\Rightarrow$ $m = n$

V. A 0 term. számnak megvan valamely T tulajdonsága. Valahányszor az n term. számnak megvan a T tulajdonsága, mindannyiszor n' term. számnak is megvan $\Rightarrow$ minden term. számnak megvan a T tulajdonsága. ($\Rightarrow$ teljes indukció axiómája)

Teljes indukció:

Tétel: Teljes indukció: A P_n kijelentés, melynek megfogalmazásában az n term. szám paraméterként szerepel, igaz $\forall$ $n \geq k_0$ (k_0 adott) term. számra, ha P_{k_0} igaz
Valahányszor P_k ($k \geq k_0$) igaz, mindannyiszor P_{k+1} is igaz.

BIZ.: $M := \{n \mid n\text{-re } P_n \text{ igaz}\}$
Az a; miatt $0 \in M$
b; miatt valahányszor $k \in M$, mindannyiszor $k+1 \in M$. Az V. állítás miatt $M = N$, tehát P_n igaz minden $n \in \mathbb{N}$.

Tétel: A P_n kijelentés, melynek megfogalmazásában az n természetes szám, mint paraméter szerepel, érvényes minden $n \geq k_0$ (k_0 adott) term. számra teljesülnek a következők:

a; P_{k_0} igaz;

b; valahányszor P_x ($k_0 \leq x \leq k$) igaz, mindannyiszor P_{k+1} is igaz.

BIZ.:

Tfh.: n_0 a legkisebb term. szám, amelyre P_n hamis.
Ha $n_0 = k_0$, akkor ellentmondás a;-val. Ha $n_0 \neq k_0 \Rightarrow$ P_x igaz, de P_n hamis $\rightarrow$ ellentmondás b;-vel.

Példa:

$$1+2+3+\ldots\ n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1., $n=1$ $\qquad$ $n=2$

$1 = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$ ✓ $\qquad$ $3 = \frac{2\cdot 3}{2} = 3$

2., Tfh $n = k$-ra is igaz:

$$1+2+3+\ldots\ k = \frac{k(k+1)}{2}$$

3., Biz be 2.,-vel, h. $n = k+1$-re is igaz.

$$\underbrace{1+2+3+\ldots\ k}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad /\cdot 2$$

$$k^2+k+2k+2 = k^2+3k+2$$

$$k^2+3k+2 = k^2+3k+2 \quad ✓$$

példa:

$$2^n \geq 2n+1 \qquad (n \geq 3)$$

1., $n=3$ $\qquad$ $n=4$

$2^3 \geq 6+1$ $\qquad$ $16 \geq 9$ ✓

$8 \geq 7$ ✓

2., Tfh: $n=k$-ra is igaz!

$$2^k \geq 2k+1$$

3., Biz be 2.-vel $n = k+1$-re is!

$$2^{k+1} \geq 2(k+1)+1$$

$$2\cdot 2^k \geq 2k+2+1$$

$$2^k+2k \geq 2k+2+1$$

$$2k \geq 2 \quad ✓$$

$6 \mid n(2n+1)(7n+1)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

1., $n=1$ $\quad$ $n=2$

$6 \mid 24$ ✓ $\quad$ $6 \mid 150$ ✓

2., Tfh.: $n=k$-ra is igaz!

$6 \mid k(2k+1)(7k+1) \rightarrow 6 \mid 14k^3+9k^2+k \qquad 14k^3+9k^2+k=6A$

3., Biz. be 2-vel $n=k+1$-re is.

$6 \mid (k+1)(2k+3)(7k+8)$

$6 \mid (2k^2+5k+3)(7k+8)$

$6 \mid (14k^3+51k^2+61k+24)$

$6 \mid \underbrace{14k^3+9k^2+k} + 42k^2+60k+24$

$6 \mid \quad 6A + 6(7k^2+10k+4)$

$6 \mid \quad 6(A+7k^2+10k+4)$ ✓

Rekurzív definíció:

Legyen F_n egy, az n term. számtól függő fogalom, amiben szerepelhetnek változók is. Az F_n fogalom minden n term. számra definiálva van, ha

a., $F_0 := A$

b., $F_{k+1} := B_k$

ahol F_n az A formulában egyetlen n esetén sem szerepel, a B_k-ban pedig csak $n \leq k$ esetben fordulhat elő.

A rek. definícióban egyedi fogalom helyett általános fogalom szerepelt.

Végtelen halmazok számossága:

Végtelennek nevezünk egy halmazt, ha az ekvivalens valamely, önmagától különböző részhalmazával.

Ilyen pl.: $\mathbb{N}$.

$\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(k \to \sigma k = k+1)$ léptetés injektív, de nem szürjektív

Def.: Megszámlálhatóan végtelen számosságúnak mondunk egy H halmaz, ha H ekvivalens a term. számok $\mathbb{N}$ halmazával.

Tétel: Megszámlálhatóan végtelen halmaz $\forall$ részhalmaza vagy véges, vagy megszámlálhatóan végtelen

BIZ.:

Feltehető, h a megszámlálhatóan végtelen H halmaz elemei

$a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$

Legyen $H' \subseteq H$ a_{n_1} az első olyan elem, amely H'-ben benne van

a_{n_2} a 2. elem és így tovább.

Két eset van:

a; ha kimeríjük véges sok lépésben H minden elemét $\to H'$ véges

b; az $a_{n_1}; a_{n_2} \ldots$ végtelen sorozatot kapjuk $\to H'$ megsz-an végtelen

Tétel: Véges sok, ill. megszámlálhatóan végtelen sok megszámlálhatóan végtelen halmaz egyesítése megszámlálhatóan végtelen.

BIZ: $H_1 := a_{11}; a_{12} \ldots$
$H_2 := a_{21}; a_{22} \ldots$
} adott megsz-an végtelen halmazok

$H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ egyesített halmaz elemei felírhatók :

$a_{11}; a_{12}; a_{21}; a_{13}; a_{22}; a_{31}; a_{14}; a_{23}; a_{32}; a_{41} \ldots$

Így H megsz-an végtelen.

Tétel: Az összes (rendezett) term. számpár halmaza megsz-an végtelen.

BIZ.: a term. számpárok felírhatók

$$\begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \ldots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & \ldots \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & \ldots \end{array}$$

Ezek felírhatók: (0,0) ; (0,1) ; (1,0) ; (0,2) ; (1,1) ; (2,0)

A tétel igaz.

Tétel: Az összes racionális szám halmaza megsz-an végtelen.

BIZ.: A rac. számokat felírhatjuk.

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & & & & & & & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} & 3 & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 4 & \ldots \\ -1 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{3} & -3 & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & -\frac{3}{2} & -4 & \ldots \end{array}$$

Felírhatók: $0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \ldots$ A tétel igaz.

Mj.:
- Megsz-an végtelen halmaz elemeiből alkotott sorozat halmaza megsz-an végtelen.
- Az összes racionális együtthatós polinom halmaza megsz-an végtelen.

- Az összes racionális együtthatós egyenlet összes komplex gyökének a halmaza megsz-an végtelen.
- Minden végtelen halmaznak van megsz-an végtelen részhalmaza
- Végtelen halmaz számossága nem változik, ha véges v. megsz-an végtelen sok elemet hozzáveszünk.

Tétel: A valós számok halmaza nem megsz-an végtelen.

BIZ.: Elegendő azt megmutatni, h. a $\mathbb{N}$ halmaznak a $(0,1)$ nyílt intervallum pontjainak halmazába való leképezés sosem szürjektív.

A 0 és 1 közötti valós számok egyértelműen írhatók fel.

$$0,a_1a_2a_3\ldots$$

alakú tizedestörtként, ahol $a_1, a_2, a_3 \ldots$ a 0-9 számjegy valamelyike.

Tfh.: $(0,1)$ intervallumban lévő valós számok halmaza megsz-an végtelen $\to$ az összes ilyen szám felírható

$v_1, v_2, v_3 \ldots$ sorozatban

Sorozat tagjai:

$$v_1 = 0,a_{11}\,a_{12}\,a_{13}$$
$$v_2 = 0,a_{21}\,a_{22}\,a_{23}$$
$$v_3 = 0,a_{31}\,a_{32}\,a_{3}$$
$$\vdots$$

Állítjuk, h. $\exists$ $(0,1)$-ben lévő valós szám, amelyik nem fordul elő a $v_1, v_2 \ldots$ stb sorozatban.

$$v := 0,b_1b_2b_3$$

ahol:

$$b_i = \begin{cases} 1, \text{ ha } a_{ii} \neq 1 \\ 2, \text{ ha } a_{ii} = 1 \end{cases} \quad (i = 1,2\ldots)$$

Egyik v_n-nel sem lehet egyenlő a v, mert legalább az n-dik tizedesjegy különbözik v_n n-dik tizedesjegyétől. Az ellentmondás fakadója $\Rightarrow$ AZ ÁLLÍTÁS IGAZ!

Ez a bizonyítási módszer a CANTOR-féle ÁTLÓS MÓDSZER.

Def.: kontinuumszámosságúnak nevezzük a valós számok halmazával ekvivalens halmazokat.

Tétel: Az irracionális számok halmaza is kontinuumszámosságú.

Tétel: A sík pontjai is kontinuumszámosságú.

BIZ.:

Mivel a 0 és 1 közé eső valós számok felírhatók:

$$x_1 = 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$$

$$x_2 = 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$$

Végtelen tizedestört alakban, ezért az (x_1, x_2) számpárhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhető a

$0{,}a_{11}a_{21}a_{12}a_{22}a_{13}a_{23}\ldots$ végtelen tizedestört alakban.

ÍGY A TÉTEL IGAZ!

Tétel: A komplex számok halmaza is kontinuumszámosságú.

Műveletek számosságokkal:

Def.: Az m és k számosság $m+k$ összegén olyan $H \cup K$ halmazok közös számosságát értjük, amelyekre $|H| = m$, $|K| = k$ és $H \cap K = \emptyset$ teljesül, azaz

$$|H| + |K| := |H \cup K| \qquad (H \cap K = \emptyset)$$

Def.: Az m és k számosság mk szorzatán az olyan $H \times K$ halmazok közös számosságát értjük, ahol $|H| = m$, $|K| = k$ azaz

$$|H| \cdot |K| := |H \times K|$$

Def.: n és k számosság hatványa (n^k):

$$|N|^{|K|} := |N^K| \qquad (N \neq 0 \lor K \neq 0)$$

azonosságok:

$$n + k = k + n$$

$$kn = nk$$

$$(n+k)+l = n+(k+l)$$

$$(nk)\,l = n\,(kl)$$

$$(n+k)\,l = nl + kl$$

$[\,N \times K = 0$, ha $N = 0 \lor K = 0\,]$

$$n^k n^l = n^{k+l}$$

$$(nk)^l = n^l k^l$$

$$(n^k)^l = n^{kl}$$