2. tétel

A leképezés fogalma, speciális leképezések, leképezések szorzása, inverzleképezés. Rendezett halmazok.

Def.: Egy $f(\subseteq H \times K)$ relációt a H halmaz K halmazba való **leképezésnek** nevezzük, ha H mindegyik a eleméhez egy olyan $b(\in K)$ elem van, amelyre $(a,b)\in f$. A b-t az a **képelemének** (képének), a-t pedig b **eredeti elemének** mondjuk.

jel.: $a \to b$; $fa = b$; $a \to fa$; $(a,b) \in f$

jel.: A H halmaz f leképezését K-ba így jelöljük: $f: H \to K$

Def.: A $f: H \to K$ $(a \to fa)$, $\varphi: H_1 \to K_1$ $(a_1 \to \varphi a_1)$ leképezések $\Leftrightarrow$ **egyenlők**, ha $H = H_1$, $K = K_1$, és $\forall$ $a(\in H)$-ra $fa = \varphi a$.

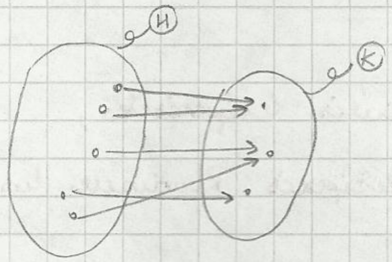
Speciális leképezések:

a, **Szürjektív:** Ha a $f: H \to K$ leképezésnél $fH = K \Rightarrow$ H-nak K-ra való leképezésről beszélünk.

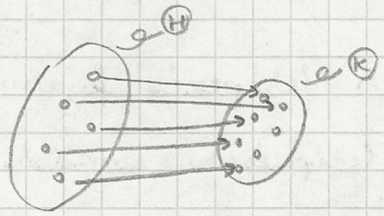
b, **Injektív:** Ha a $f: H \to K$ leképezésnél különböző elemeknek különböző képelemei vannak, azaz $a \neq b \Rightarrow fa \neq fb$. $\Rightarrow$ H-nak K-ba való leképezése kölcsönösen egyértelmű.

c, **Bijektív:** Ha a $f: H \to K$ leképezés H-nak K-ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése, azaz, ha a leképezés egyidejűleg szürjektív és injektív.
jel.: $f: H \cong K$.

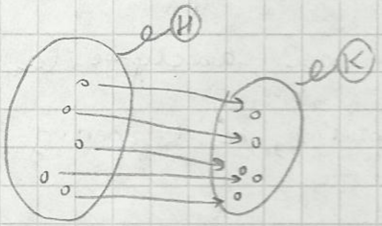
a., $f: H \to K$ szürjektív:



b., $f: H \to K$ injekció



c., $f: H \to K$ bijekció



Ha speciálisan $K = H \Rightarrow$ H-nak önmagába ill. önmagára való leképezéséről van szó. Ez is lehet szürjektív, injektív, bijektív. A H halmaz önmagába való leképezését transzformációnak, önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését pedig permutációnak nevezzük.

Tétel: Ha A tetszőleges, H pedig legalább kételemű $\Rightarrow$ $\delta: A \to H^A$ leképezések között van injektív, de nincs szürjektív.

(! A, H tetszőleges, de nem üres halmaz. A-nak H-ba való leképezése egy halmazt alkot, amit H^A jelöl: $H^A := \{f \mid f: A \to H\}$, ez az A halmaz H halmazba való leképezéshalmaza (fgv.halmaza))

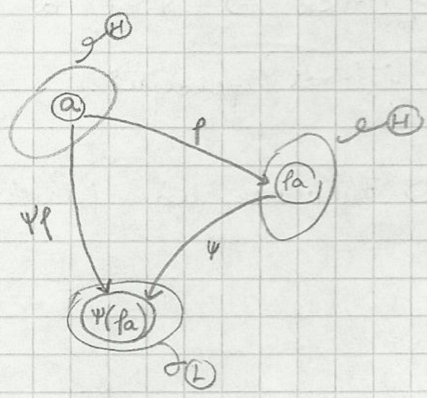
Tétel: $\exists$ olyan σ bijektív leképezés, melyre

$$\sigma: P(A) \cong \{0,1\}^A$$

Leképezések szorzása:

Def.: A $f: H \to K$, $\psi: K \to L$ leképezések ψf szorzatán értjük a f és a ψ leképezések egymás utáni végrehajtását.

Röviden: $\psi f: H \to L$ az a leképezés, amelyre $(\psi f)a := \psi(fa)$



Leképezések szorzata újra leképezés!

Tétel: A leképezések szorzása asszociatív.

BIZ.:

! $f: H \to K$, $\psi: K \to L$, $\sigma: L \to M$.

A lek. szorzásának def.-ja alapján

I. $[(\sigma\psi)f]a = (\sigma\psi)(fa) = \sigma(\psi(fa))$

II. $[\sigma(\psi f)]a = \sigma((\psi f)a) = \sigma(\psi(fa))$

$$\Downarrow$$

$$(\sigma\psi)f = \sigma(\psi f)$$

Def.: a, ! $f: H \to H$ $(a \to a)$

A leképezést identikus leképezésnek nevezzük, ε_H-val jelöljük.

Ez BIJEKTÍV.

b, ! $f: H \to K$. $\forall$ $a(\in H)$-ra teljesül

$$(f\varepsilon_H)a = f(\varepsilon_H a) = fa$$

$$(\varepsilon_K f)a = \varepsilon_K(fa) = fa$$

IGAZ az: Tetszőleges $f: H \to K$ leképezésre teljesül:

$$f\varepsilon_H = f, \quad \varepsilon_K f = f$$

Def.: Ha a $f: H \to K$ leképezéshez $\exists$ olyan $\Psi: K \to H$ leképezés amelyre $\Psi f = \varepsilon_H$ és $f\Psi = \varepsilon_K$ $\Rightarrow$ Ψ-t a f inverz leképezésének nevezzük, és f^{-1}-nel jelöljük.

Tétel: A $f: H \to K$ leképezésnek $\Leftrightarrow$ $\exists$ inverze, ha a f bijektív.

BIZ.: Tfh.:

$f: H \to K$ bijektív. Ekkor $\exists$ $\Psi: K \to H$ ahol:

$$\Psi b := a \Leftrightarrow fa = b$$

Nyilvánvaló: $\Psi f = \varepsilon_H$, $f\Psi = \varepsilon_K$

Megfordítva: $f^{-1}: K \to H$

$$f^{-1}f = \varepsilon_H \qquad ff^{-1} = \varepsilon_K$$

Mivel K $\forall$ eleme szerepel képelemként (f szürjektív), H elemeinek a képei különbözők (f injektív). Ekkor $a = f^{-1}b \Rightarrow$

$$fa = f(f^{-1}b) = (f \cdot f^{-1})b = \varepsilon_K b = b$$

$$\Downarrow$$

Ez azt jelenti, hogy K minden eleme képe H $\forall$ elemének

! $a \neq a_1$ $(a, a_1 \in H)$ $\quad fa = fa_1 \Rightarrow$

$$(f^{-1}f)a = (f^{-1}f)a \Rightarrow \varepsilon_H a = \varepsilon_H a_1 \Rightarrow a = a_1$$

Beláttuk, h a tétel igaz, és hasonlóan IGAZ:

a; injektív leképezések szorzata injektív

b; bijektív leképezések szorzata bijektív

BIZ.: a; ! f és Ψ

Tfh: $(\Psi f)a = (\Psi f)a$; ami $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Psi(fa) = \Psi(fb)$. Mivel Ψ injektív $fa = fb$. Mivel f injektív $\Rightarrow a = b$.

Def.: Egy H halmazt részben rendezettnek nevezünk, ha
H-ban értelmezve van egy $\preceq$ rendezési reláció
(A $\preceq$ reláció szerint részben rendezett H halmazt
így jelöljük: $(H; \preceq)$.
A $(H; \preceq)$ halmaz a és b elemét összehasonlíthatónak
mondjuk, ha $a \preceq b$ vagy $b \preceq a$. Ha ezek
egyike sem teljesül $\Rightarrow$ az a és b elem összehasonlíthatatlan.)
A $(H; \preceq)$ részben rendezett halmaz tetszőleges a, b elemére
tehát az $a \preceq b$, $b \preceq a$ közül legfeljebb az egyik
teljesül.

Def.: Egy $(H; \preceq)$ részben rendezett halmaz rendezett a
$\preceq$ reláció szerint, ha $\forall\, a, b\,(\in H)$ elemre $a \preceq b$ és $b \preceq a$
közül legalább az egyik teljesül.

A rendezett halmazt szokás teljesen rendezett (LINEÁRISAN RENDEZETT) -nek is nevezni.

Tétel:

A H halmaz $\Leftrightarrow$ rendezett a $\preceq$ reláció szerint, ha
a, a $\prec$ reláció H-ban tranzitív
b, $\forall\, a, b\,(\in H)$ elemre az $a \prec b$, $a = b$, $a \succ b$
közül pontosan az egyik teljesül (TRICHOTOMIA)

Def.: A $(H; \leqq)$ rendezett halmaz hasonló a $(K; \leqq)$ rendezett halmazhoz, ha van olyan $f: H \to K$ leképezés, amelyik
a) bijektív
b) rendezéstartó, azaz $a \leqq b \Rightarrow fa \leqq fb$.

Def.: Egy rendezett halmaz rendtípusán értjük a hozzá hasonló rendezett halmazok ekvivalenciaosztályát.

Def.: Valamely $(H; \leqq)$ rendezett halmaz részhalmazán olyan részhalmazt értünk, amely maga is rendezett a H-beli rendezési reláció szerint.

Def.: Jólrendezettnek mondunk egy halmazt, ha $\forall$ nem üres részhalmazának van első, azaz legkisebb eleme.

Def.: A jólrendezett halmazok rendtípusait rendszámoknak nevezzük.

2/c