1. tétel

A reláció fogalma. Adott halmazon értelmezett reláció tulajdonságai. Osztályozás, ekvivalenciaosztályok, faktorhalmaz.

A binér (kétváltozós) reláció fogalma:

Def.: A H és K halmaz $H \times K$ Descartes-féle szorzatának $\forall$ nem üres ρ részhalmazát a H és K közötti (binér) relációnak nevezzük.
(H és K sorrendje is FONTOS!)

jelölés: $(a,b) \in \rho \rightarrow$ „a" elem ρ relációban van „b" elemmel

$[a \rho b,\ \rho(a,b),\ \rho ab]$

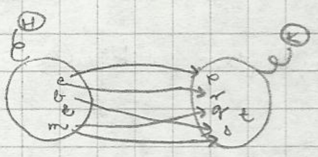
Ezek kiterjeszthetők többváltozós esetre is:

Def.: A $H_1, H_2 \dots H_n$ halmazok $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ Descartes-féle szorzatának $\forall$ ρ részhalmazát (n változós) relációnak nevezzük.

A reláció tagadása:

$a \not\rho b$, de gyakran $(a,b) \in \bar{\rho} \rightarrow \bar{\rho} = (H \times K) \setminus \rho$

pl.:



ρ értelmezési tartománya:

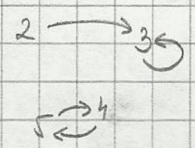
Def.: Ha adott egy binér reláció (pl.: $\rho \subseteq H \times K$) $\Rightarrow$ a ρ ért. tartományán a D_ρ-t értjük.

$D_\rho := \{x \mid x \in H,\ \exists\ y \in K \text{ úgy } (x;y) \in \rho\}$

$R_\rho := \{y \mid y \in H,\ \exists\ x \in K \text{ úgy } (x;y) \in \rho\}$

Fontos a $H=K$ eset. Ilyenkor a H halmazon értelmezett relációról beszélünk.

pl.: $H := \{2;3;4;5\}$ $\qquad \varrho := \{(2,3);\ (3,3);\ (4,5);\ (5,4)\}$



Def.: A H halmazon értelmezett ϱ reláció tulajdonságai lehetnek:

- reflexív $\quad \forall h \in H \quad h \varrho h$
- szimmetrikus $\quad \forall h_1, h_2 \in H \quad h_1 \varrho h_2 \Rightarrow h_2 \varrho h_1$
- antiszimmetrikus $\quad \forall h_1, h_2 \in H \quad h_1 \varrho h_2$ és $h_2 \varrho h_1 \Rightarrow h_1 = h_2$
- tranzitív $\quad \forall h_1, h_2, h_3 \in H \quad h_1 \varrho h_2 \wedge h_2 \varrho h_3 \Rightarrow h_1 \varrho h_3$

Def.: A H halmazon definiált reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük.

pl.: sík halmazán a párhuzamosság

A Δ-ek halmazán az egybevágóság

Def.: A H halmazon definiált reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív tulajdonságú relációt rendezési relációnak nevezzük.

Def.: A H halmazt rendezettnek nevezzük, ha értelmezve van rajta egy $\leq$ rendezési reláció.

pl.: $\mathbb{N}$-ben az oszthatóság

teljes rendezés: $\mathbb{N}$-ben a $\leq$.

A $H \neq \emptyset$ osztályozása:

A halmaz parKitius részhalmazokra bontása. Olyan részhalmazok-ra való bontása, ahol - egyetlen részhalmaz sem üres, a részhalmazok uniója $= H$ - a részhalmazok páronként idegenek, azaz diszjunktak.

Tétel: $H \neq \emptyset$. H-n értelmezett ekvivalenciareláció H egy osztályozását generálja, és viszont.

BIZ: H halmazon adott egy ekvivalenciareláció

$$H = \{a, b, c \dots\}$$

$$C_a := \{h \mid h \in H, a \,S\, h\} \qquad C_b := \{h \mid h \in H, b \,S\, h\}$$

részhalmazokat definiálunk

1.) $C_a ; C_b \dots \subseteq H$

$C_a \neq \emptyset$, mert $a \in C_a$ (min az „a" benne van. Mivel S reflexív $\Rightarrow$ min önmagával relációban van.)

2.) $C_a \cup C_b \cup C_c \dots = H$

Min 1x azok benne vannak, amelyek az indexben szerepelnek.

3.) indirekt : $C_a \cap C_b \neq \emptyset$

Tfh.: $\exists\; a, b \in H$, ahol $\underbrace{C_a \cap C_b = \emptyset}$ $\Rightarrow C_a = C_b$

$\exists$ olyan $h \in H$, ahol

$$h \in C_a \quad \text{és} \quad h \in C_b$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\underbrace{a \,S\, h \qquad b \,S\, h}_{a \,S\, b}, \text{ de } h \,S\, b$$

$\forall\; h \in C_a$

$$\left.\begin{array}{l} a \,S\, h \wedge a \,S\, b \\ \Downarrow \\ h \,S\, a \wedge a \,S\, b \end{array}\right\} \Rightarrow h \,S\, b = b \,S\, h \Rightarrow h \in C_b$$

$$\underline{\underline{C_a \subseteq C_b}}$$

Viszont: Adott H-nak egy osztályozása.

a S b :⟺, ha a S b ugyanannak az osztálynak az eleme

Tfh: S ekv. rel.

- reflexív
- szimm: „a" ugyanabban az osztályban van, mint b és fordítva
- tranzitív: ha a és b egy osztályban volt, és b és c is ⟹

a és c is egy osztályban lesz.

Osztályokból is lehet halmazt csinálni

$$H/S := \{\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} \dots\}$$

Az ekv. osztályok halmaza: FAKTORHALMAZ

Def.: Egy nem üres halmaznak a

- egyik sem üres
- U-juk a H
- páronként diszjunktak

tulajdonságokat kielégítő részhalmazát OSZTÁLYnak nevezzük,

a kérdéses részhalmazokat pedig ekvivalenciaosztályoknak.

Def.: A H halmazon értelmezett S ekv. relációhoz tartozó

ekv. osztályok halmaza a H-nak S által meghatározott

FAKTORHALMAZA.

jelölés: H/S