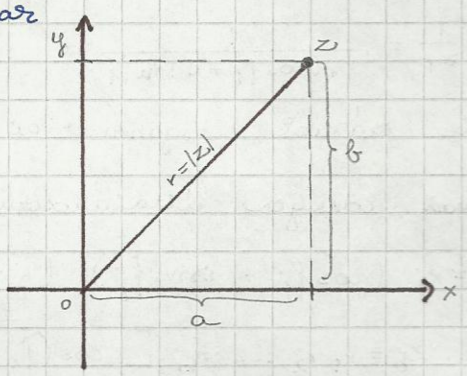
5. tétel

Komplex számok trigonometriai alakja. Műveletek trigonometriai komplex számokkal. Gyökvonás, egységgyök.

A Gauss-féle számsíkon a polárkoordináta-rendszerben a P pontnak a polárkoordinátái legyenek $(r; \varphi)$, ahol r a P pontnak a pólustól való távolságát, φ pedig az OP szakasznak a tengellyel bezárt szögét jelenti. Tudjuk, hogy az $(r; \varphi)$ polárkoordináták a P-t egyértelműen meghatározzák. Fordítva, egy P pont az r-et egyértelműen, de φ-t csak 2π egész számú többszöröseitől eltekintve határozza meg.

A z által meghatározott pont derékszögű koordinátái tehát $(a; b)$ ugyanennek a pontnak a polárkoordinátái pedig legyenek $(r; \varphi)$. A derékszögű koordináták és a polárkoordináták között fennállnak



$a = r \cdot \cos\varphi$

$b = r \cdot \sin\varphi$

ill. $r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}$ összefüggések.

Felhasználva az $a = r\cdot\cos\varphi$ és $b = r\cdot\sin\varphi$ és $z = a+bi$ komplex számot: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Ezt a <u>z komplex szám trigonometriai alakjának</u> nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy a z komplex szám konjugáltjára

$$\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i\cdot\sin(-\varphi)) \text{ teljesül.}$$

Minthogy a komplex szám trigonometriai alakja kéttényezős szorzat, a trigonometriai alak nem alkalmas összeadás és kivonás elvégzésére, viszont annál inkább használható komplex számok szorzatának, hatványainak és hányadosának kiszámítása.

Legyen adott a

$z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$

$z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$ komplex szám

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\underbrace{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}_{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} + (\underbrace{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}_{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}) i \right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right]$$

azaz trigonometriai alakban adott komplex számok szorzásakor az abszolút értékeket szorozzuk, az argumentumokat pedig összeadjuk,

ha $z_1 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{r_2}{r_1} \left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right]$

Ebből speciálisan:

$$z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1} = r_1^{-1} \left[\cos(-\varphi_1) + i \sin(-\varphi_1) \right]$$

A komplex számok trigonometriai alakjainak szorzása teljes indukcióval könnyen általánosítható több tényező esetére.

Ha $z_j = r_j (\cos \varphi_j + i \sin \varphi_j)$ $(j = 1, 2 \ldots k) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_k = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_k \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k) \right] \Rightarrow$

$\Rightarrow z^k = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$ $(k \in \mathbb{N})$

Tétel: (Moivre-képlet) a trigonometriai alakban adott $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex szám k-dik hatványa $z^k = r^k (\cos k\varphi + i \cdot \sin k\varphi)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$ (tetszés szerinti)

Ez geometriailag azt jelenti, hogy a komplex számot ábrázoló vektort elforgatjuk φ többszöröseivel, s azután a vektorokat megnyújtjuk.

Gyökvonás komplex számból

Def.: A $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám n-dik gyökén olyan olyan w komplex számot értjük, amelyre $w^n = z$ teljesül.

Más szóval az $x^n = z$ egyenlet megoldásait nevezzük a z komplex szám n-dik gyökeinek.

jele: $w = \sqrt[n]{x}$

A gyökvonás többértékű

Tegyük fel, hogy $w^n = z$ kielégítő w létezik. Vegyük fel w-t trigonometriai alakban $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Ekkor $w^n = z$ alapján, felhasználva továbbá a Moivre-képlet:

$$s^n(\cos n\psi + i\cdot\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

Ez az egyenlőség ekvivalens a következő egyenletpárral:

$$s^n = r; \quad n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

Innen $s = \sqrt[n]{r}$; $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, ahol $\sqrt[n]{r}$ egyenlet nemnegatív valós értéket jelent.

Eszerint $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right]$, ahol $k \in \mathbb{Z}$

Minthogy a cos és sin fgv 2π szerint periódikus, ezért nyilván-valóan elegendő a $k = 0; 1 \ldots; n-1$ értékeket figyelembe venni.

Tétel: A trigonometriai alakban adott

$z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ komplex szám összes n-dik gyöke az

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \quad (k = 0; 1; \ldots; n-1)$$

alakban felírt komplex szám.

(gyököt vonunk a valós részből, az argumentumát megszorozzuk egész 2π-vel és eltoljuk a kitevővel (n) n db gyöke van egy komplex számnak.)

Az egységgyökök: (ε)

$\varepsilon^n = 1 \qquad \left(\varepsilon = \sqrt[n]{1}\right)$

$1 = 1\cdot(\cos 0 + i \sin 0)$ trigonometriai alakban írható fel.

$\varepsilon_0;\ \varepsilon_1;\ \dots;\ \varepsilon_{n-1}$

$$\boxed{\varepsilon_j = 1\cdot\left(\cos\frac{j\cdot 2\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{j\cdot 2\pi}{n}\right)}$$

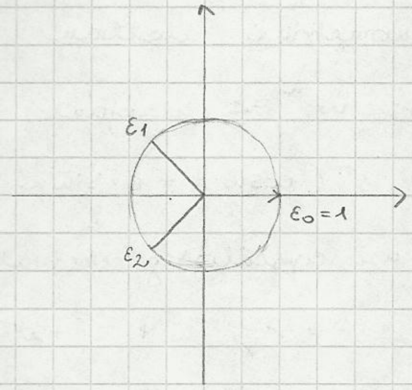
pl.: $n = 2$ $\quad \varepsilon_0 = 1$
$\varepsilon_1 = -1$

$n = 3 \quad \varepsilon_0 = 1 \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$n = 4 \quad \varepsilon_0 = 1 \quad \varepsilon_1 = i \quad \varepsilon_2 = -1 \quad \varepsilon_3 = -i$

$\sqrt[n]{z} = w_j$

$w_j = w_0\cdot\varepsilon_j = w_0\cdot\varepsilon_1^{j}$



Def.: Az n-dik egységgyökök közül ε_j-t primitív n-dik egységgyöknek nevezzük, ha ε_j pozitív egész kitevős hatványaként az összes n-dik gyök előállítható.

Tétel: $\varepsilon_j \Leftrightarrow$ primitív, ha j és n relatív prím.