10. tétel

Az algebrai egyenlet fogalma. Ruffini - Ábel tétele, az algebra alaptétele. Összefüggés az algebrai egyenletek gyökei és együtthatói között; a gyöktényezős alak.

Def.: Legyen $(T; +; \cdot)$ test, $f(x) \in T[x]$, $f^\circ \geq 1$.

$f(x) = 0$ algebrai egyenlet.

Algebrai megoldás:

Az $f(x)=0$ algebrai egyenlet algebrai megoldása, ha összeadás, kivonás, szorzás, osztás, pozitív egész kitevőjű gyökvonás véges sokszori alkalmazásával állítjuk elő a gyököt. (= megoldást.)

$f(x)=0$ megoldóképlete:

Az algebrai eljárással az egyenlet együtthatóiból nyert képlet, amelynek értékei a gyökök.

Példa: 1., $ax + b = 0 \quad a \neq 0$

$$x = -\frac{b}{a}$$

2., $ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$b^2 - 4ac \geq 0$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tétel: (Ruffini - Ábel tétel)

$f^\circ \geq 5$ esetén nem létezik általános megoldóképlet.

Példa: $x^5 - 32 = 0$

$x^5 = 32$

$x = \sqrt[5]{32}$ → x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 binom egyenlet

Algebra alaptétele: (megoldható-e az egyenlet)

$\forall\, f(x) = 0$ $\underbrace{(f^\circ \geq 1,\ f(x) \in \mathbb{C}[x])}_{\text{legalább elsőfokú komplex együtthatós}}$ egyenletnek $\exists$ gyöke $\mathbb{C}$-ben.

pl.: $x^2 + 2 = 0$ $\quad x \in \mathbb{C}$ $\quad x = \sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$

$\mathbb{R}$: $x^2 + 2 = 0$ $\quad \nexists$ megoldás

BIZ: —

$f(x) = 0$ EKVIVALENS $g(x) = 0$-val a T test felett, ha gyökeik azonosak.

$x - 1 = 0$ $\qquad\qquad x^3 - 1 = 0$

$\underline{x = 1}$

$\mathbb{C}$ felett nem ekvivalensek, mert $(x_1 = 1)$

$\left(x_{1,2,3} = \sqrt[3]{1};\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\mathbb{R}$ felett ekvivalensek, mert $x_1 = 1$ $\qquad x_1 = 1$.

Ekvivalens átalakítás, amely ekvivalens egyenletet képez (eredményes.)

Példa: $\mathbb{R}$ felett $x^3 - 1 = 0$

$$(x-1)\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{} = 0$$

egyszerűsíthetek vele, mert ennek a gyökei a komplex számok között valók.

$\mathbb{C}$ felett $x^3 - 1 = (x-1)\underbrace{(x^2 - x + 1)}_{} = 0$

nem egyszerűsíthetek vele, mert gyököt veszthetek.

Következmény egyenlet:

$f(x)=0$ -nak következményegyenlete a $g(x)=0$, ha $g(x)=0$ gyökei között az $f(x)=0$ $\forall$ gyöke megtalálható.

pl.: $(x^2+2x-1)^2=3$

$|x^2+2x-1|=\sqrt{3}$

(Olyan eljárás, amely gyökvesztést eredményez, nem alkalmazható.)

Df.: $f(x)=0$, $f^\circ=n\geq 1$, $f(x)\in \mathbb{C}[x]$

Az algebra alaptétele szerint $\exists\ \alpha_1\in\mathbb{C}$, hogy $f(\alpha_1)=0$.

Segédtétel: $\underbrace{x-\alpha}_{\text{lineáris komplex szám}} \mid f(x) \Leftrightarrow f(\alpha)=0 \quad \alpha\in\mathbb{C}$

BIZ.: $f(x)=(x-\alpha)\cdot f_1(x)+c$ ($c=$ konstans)

- ha $f(\alpha)=0$: $f(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot f_1(\alpha)+c \Rightarrow c=0$.
- ha $c=0$: $x-\alpha \mid f(x)$

$f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0=0 \quad a_n\neq 0 \quad a_i\in\mathbb{C}$

$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot f_1(x)$

- ha $f_1^\circ\geq 1$ akkor az algebra alaptétele $\Rightarrow \alpha_2\in\mathbb{C}$

$f_1(\alpha_2)=0$

$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot f_2(x)$

$\vdots$

ha $f^\circ\geq 1$

$f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$, pontosan n gyöke van egy algebrai egyenletnek a $\mathbb{C}$ test felett.

Van-e még több gyök?: NINCS

(BIZ: indirekt módon)

az algebra alaptétele csak a $\mathbb{C}$ számok körében értelmezhető.

<u>Következmény:</u>

$\mathbb{C}[x]$ - ben pontosan az elsőfokú polinomok az irreducibilis, avagy prímpolinomok.

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

$b^2 - 4ac \geq 0$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$; $\qquad x_{12} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

<u>Általános esetben a gyökök és együtthatók összefüggése:</u>

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$

Két polinom egyenlő, ha a megfelelő főszámaik egyenlőek.

x^n : $a_n = a_n$

x^{n-1} : $a_{n-1} = -a_n (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$

x^{n-2} : $a_{n-2} = a_n (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n)$

$\vdots$

x^0 : $a_0 = a_n (-1)^n \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$

Egyszer sem választom az x-et, hanem helyette α-kat.

Gyökök és együtthatók módszere.

Ismerni kell a gyököket. Arra jó, amelynek az én általam megadott gyököket használom, alkalmazom.