15. tétel

Determináns kifejtése. Laplace tétele. Determináns szorzatára bomló determináns. Determinánsok szorzása.

Tétel: Ha egy n-edrendű det. első sorában az első elem kivételével minden elem 0, akkor a det értéke egyenlő a nem 0 elem szorozva azzal az (n-1)-edrendű det-sal, amelyet úgy kapunk, hogy a det-ből az első sort és első oszlopot elhagyjuk.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{D_{n-1}}$$

BIZ.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n \\ 1 & i_2 \dots i_n \end{pmatrix} \in P_n} (-1)^I a_{11} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} =$$

$$= a_{11} \sum_{\begin{pmatrix} 2 & 3 \dots n \\ i_2 & i_3 \dots i_n \end{pmatrix} \in P_{n-1}} (-1)^I a_{2i_2} \cdot a_{2i_3} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} := a_{11} \cdot D_{n-1}$$

Def.: Egy n-edrendű det. a_{ij} eleméhez tartozó aldeterminánsán értjük azt az (n-1)-edrendű det-t, amely az eredetiből az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyása után keletkezik.

Jel: D_{ij}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_{ij}$$

Def.: Egy n-edrendű det. a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsán értjük és A_{ij}-vel jelöljük:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Adj. aldet. előjellel ellátott aldet.

Tétel: Ha egy n-edrendű det. i-dik sorában a_{ij} elem kivételével minden elem 0, akkor a det. értéke egyenlő az a_{ij} szorozva a hozzá tartozó adj. aldeterminánssal.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} \cdot A_{ij}$$

BIZ.: A det. i-dik sorát szomszédos sorcserékkel visszük fel az első sorba. Majd ezután a j-dik oszlopot szomszédos oszlopcserékkel visszük az első oszlop helyére. Ezek után egy olyan det-t kapunk, amely első sorában az első elem a_{ij}, a többi elem 0, ezért az előző tétel értelmében a det. értéke az a_{ij} szorozva azzal a det-sal, amely az eredetiből az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával keletkezik.

Azt kell megvizsgálni, hány szomszédos sor és oszlopcsere volt, mert annyiszor váltott előjelet a det.

15/2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1+j-1=i+j} \cdot a_{ij} \cdot D_{ij} = a_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} D_{ij}}_{A_{ij}} = a_{ij} A_{ij}$$

Tétel: Kifejtési tétel

Ha egy det valamelyik sorának (v. oszlopának) minden egyes elemét megszorozzuk a hozzájuk tartozó adjungált aldeterminánssal és ezeket a szorzatokat összeadjuk, akkor a det. értékét kapjuk.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = D$$

A det. i-dik sora szerinti kifejtés.

BIZ.: A bizonyítást egy n-edrendű det. első sorára fogjuk elvégezni. Bármely sorra a bizonyítás hasonlóan történik.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{(1)}{a_{11}} + \overset{(2)}{0} + \dots + \overset{(n)}{0} & 0 + a_{12} + \dots + 0 & \dots & 0 + 0 + \dots + a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

a_{11}-hez tartozó adj. aldet.

$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n} \rightarrow$ az első sor elemei rendre meg vannak szorozva a hozzájuk tartozó adj. aldet-sal.

Pl.: Hat meg kifejtési tétellel!

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Tétel: Ferdekifejtési tétel:

Ha egy det. valamelyik sorának minden egyes elemét megszorozzuk egy másik sor megfelelő eleméhez tartozó adjungált aldeterminánssal és ezeket a szorzatokat összeadjuk, akkor 0-t (zérust) kapunk.

BIZ.:

Tekintsük a következő determinánst!

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \dots + a_{2n}\cdot A_{1n} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{1.\text{ sor sz.}}{=} a_{21}\cdot A_{11} + a_{22}\cdot A_{12} + \dots + a_{2n}\cdot A_{1n} = 0$$

ha egy det két sora =, ⇒ a det. értéke 0.

Megj.: A bizonyítás n sorra hasonlóan végezhető el.

Def.: Ha egy n-edrendű det-ből kiválasztunk k sort és k oszlopot $(1 \leq k < n)$, legyenek $i_1, i_2 \dots i_k$ és $j_1, j_2 \dots j_k$), akkor e sorok és oszlopok találkozásánál elhelyezkedő elemek meghatároznak egy k-adrendű det-t. Ezt a det-t az adott n-edrendű det. egy k-adrendű aldeterminánsának nevezzük.

Például:

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} & \downarrow & \downarrow & \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

↳ a negyedrendű det. 2-odrendű aldet-nak nevezzük.

Def.: Legyen egy n-edrendű det-nak M egy k-adrendű aldeterminánsa. Azt a det-t, amely az n-edrendű det-ből M aldetermináns sorainak és oszlopainak elhagyása után kapunk, az M k-adrendű det komplementer-determinánsának nevezzük és M'-vel jelöljük.

Def.: Legyen egy n-edrendű det-nak M k-adrendű aldeterminánsa.
A $(-1)^{i_1+i_2+\dots i_k+j_1+j_2+\dots j_k}\cdot M'$ det-t az M k-adrendű aldet-t adj. aldet-nak nevezzük. (röviden: adjungált)

Tétel: Laplace-tétel:

Ha egy n-edrendű det-ből kiválasztunk k sort v k oszlopot ($1 \le k < n$), és ezen kiválasztott sorokban v. oszlopokban található valamennyi k-adrendű aldeterminánst megszorozzuk a saját adjungált aldeterminánsukkal, és ezeket a szorzatokat összeadjuk, akkor a determináns értékét kapjuk.

Megj.: A Laplace tétel speciális esete a kifejtési tétel.
(k = 1 esetén)

Példa:

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\
\rightarrow & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{-2} \\
 & -2 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
\rightarrow & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{5} \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array} = (-1)^{2+4+2+4} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+4+5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Akkor célszerű alkalmazni, ha 0-kat tartalmaz.

<u>Két determináns szorzatára bomló determináns. Determinánsok szorzása:</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|_n \quad ; \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} = |b_{ij}|_m$$

↳ m-ed rendű

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ * & * & \dots & * & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ * & * & & * & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}_{n+m} = \underbrace{|a_{ij}|_n \cdot |b_{ij}|_m = |a_{ij}| \cdot (-1)^{2(1+2+\dots n)} \cdot |b_{ij}|_m}$$

ahol a $*$ helyén $\forall$ T beli elem állhat.

Laplace tételből következik az állítás

Tétel : Tekintsük $|a_{ij}|_n$ és $|b_{ij}|_n$

$$|a_{ij}|_n \cdot |b_{ij}|_n = |c_{ij}|_n \text{, ahol } c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj}$$

BIZ.:

$$|a_{ij}|_n \cdot |b_{ij}|_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Az első oszlop b_{11} szeresét adjuk hozzá az $n+1$-dik oszlophoz. A második oszlop b_{21}-szeresét adjuk hozzá az $n+1$-dik oszlophoz. Az n. oszlop b_{n1}-szeresét is adjuk hozzá az $n+1$-dik oszlophoz. Majd az első oszlop b_{12}-szeresét adjuk hozzá az $n+2$-dik oszlophoz. A második oszlop b_{22}-szeresét adjuk hozzá az $n+2$-dik oszlophoz. Az n-dik oszlop b_{n2}-szeresét adjuk hozzá az $n+2$-dik oszlophoz ... stb. Végül az első oszlop b_{1n}-szeresét, a második oszlop b_{2n}-szeresét ..., az n-dik oszlop b_{nn}-szeresét az utolsó oszlophoz adjuk. Ezáltal a következő determinánshoz jutunk.

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{nn} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

ahol

$$c_{11} = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} + \dots a_{1n}\cdot b_{n1} = \sum_{t=1}^{n} a_{1t}\cdot b_{t1}$$
$$\vdots$$
$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + a_{i3}\cdot b_{3j} + \dots + a_{in}\cdot b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\cdot b_{tj}$$
$$\vdots$$
$$c_{nn} = a_{n1}\cdot b_{1n} + a_{n2}\cdot b_{2n} + \dots + a_{nn}\cdot b_{nn} = \sum_{t=1}^{n} a_{nt}\cdot b_{tn}$$

Az utóbbi det. $n+1$-dik sorát n db szomszédos sorcserével vigyük fel az első sorba. Az $n+2$. sorát ugyancsak n szomszédos sorcserével a második sorba ...stb. Végül a det. utolsó sorát ugyancsak n szomszédos sorcserékkel vigyük fel az n-dik sorba.

Így a következő determinánshoz jutunk:

$$= (-1)^{n+n+\dots+n} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n^2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{(-1)^{n^2+n}}_{\text{ez } +} \cdot |c_{ij}| = |c_{ij}|_n \qquad c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\cdot b_{tj}$$

Példa:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Kiegészítjük: $1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$