14. tétel

A determináns fogalma és elemi tulajdonságai

Másodrendű determináns:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ezen mátrix determinánsán értjük

$$D = \det A = |A| = |(a_{ij})_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \in T$$

(A főátlóbeli elemek szorzatából levonjuk a mellékátlóban elhelyezkedő elemek szorzatát.)

Megj.: A mátrix táblázat, a determináns egy test beli elem.

Pl.:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \qquad |A| = D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -18 - 35 = \underline{\underline{-53}}$$

Harmadrendű determináns:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ezen mátrix determinánsa alatt értjük (és 3-adrendű determinánsnak nevezzük):

$$D = \det A = |A| = |(a_{ij})_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \in T = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \in P_3} (-1)^J a_{1 i_1} \cdot a_{2 i_2} \cdot a_{3 i_3}$$

P_3: 3 elem permutációjának a halmaza

$J : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \rightarrow$ a perm.-ban az inverziók száma

„+"

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

„−"

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sarrus-szabály:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

A főátló és a vele ∥ átlók a ⊕ előjelűek.

A mellékátló és a vele ∥ átlók a ⊖ előjelűek.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Mj.: Néha beszélünk elsőrendű determinánsról is. Ez a mátrixhoz rendelt első T-beli elem.

$A = (a_{11})$

---

pl.: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 5 = \underline{\underline{-11}}$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Az n-edrendű determináns fogalma és tulajdonságai:

Def.: Az $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ T test fölötti $n \times n$-es mátrixból

értelmezett n-edrendű determinánson a következőt értjük:

$$D = |A| = \det A = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \sum_{\binom{1,2\dots n}{i_1 i_2 \dots i_n} \in P_n} (-1)^I a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n},$$

ahol P_n jelenti az $1,2\dots n$ elemek összes permutációinak halmazát, I jelenti a $\binom{1,2\dots n}{i_1 i_2 \dots i_n}$ permutációban az inverziók számát.

Az n-edrendű determináns tehát $n!$ tagból álló algebrai összeg, amelynek tagjai az összes olyan n tényezős szorzat, amelyek minden sorból és minden oszlopból 1-1 tényezőt tartalmaznak, a tag előjele pedig ⊕ v. ⊖ aszerint, hogy az indexek permutációja páros v. páratlan.

Megj.: A definíció $n = 3,2,1$ esetén az előzőekben tárgyalt harmad-, másod- és elsőrendű determinánst jelenti.

TULAJDONSÁGAI:

1., Det.-nak és beneliüd transzponáltjáról.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} ; \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A determináns értéke egyenlő a transzponált det. értékével.

$$D = D^T$$

BIZ.:

$$D = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in P_n} (-1)^{I} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}$$

$$D^T = \sum_{\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}} (-1)^{J'} a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdot \dots \cdot a_{j_n n}$$

$J : \begin{pmatrix} j_1, & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ perm. inverziók száma

Mindkét det-ban a tagok ugyanazon elemekből képzett n tényezős szorzatok. Mindkettőben a tényezők a det. minden sorából és oszlopából egyet tartalmaznak. Ezért a D det. minden egyes tagjának van egy megfelelő tagja a D^T det-ban, amelyek csak a tényezők sorrendjében különböznek egymástól.

Vizsgáljuk meg, h. milyen az előjele!

Legyen $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots a_{ni_n}$ a D det. tagjának megfelelő tagja $a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdot \dots \cdot a_{j_n n}$ tag (itt a tényezők csak a sorrendben térnek el)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Ha a $(j_1, j_2 \dots j_n)$ elemeket átrendezzük úgy, hogy $(1, 2 \dots n)$ sorrendbe kerüljenek, akkor az $(1, 2 \dots n)$ oszlopindexek sorrendje $(i_1, i_2 \dots i_n)$ sorrendbe kerülnek.

Ez azt jelenti, h. $\begin{pmatrix} j_1, & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ perm. egyenlő $\begin{pmatrix} 1, & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

$\Downarrow$ mindebből az következik

14/4

$\begin{pmatrix} 1, 2 \dots n \\ j_1\, j_2 \dots j_n \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1\ 2 \dots n \\ i_1\, i_2 \dots i_n \end{pmatrix}$ permutációk egymás inverzei

(Ha egymás inverzei ⇒ azonos a paritásuk). Ez azt jelenti, h. D determináns minden egyes tagja azonos előjellel szerepel a D^T determinánsban. Vagyis $D = D^T$.

Megj.: Ebből a tulajdonságból következik, h. minden tulajdonság, amely igaz a det. soraira, igaz a det. oszlopaira is. Ezért elegendő csak sorokra megfogalmazni a tulajdonságot.

II. Ha egy det. valamely sorában minden elem 0, akkor a det. értéke is 0-val egyenlő.

BIZ.: A det. minden egyes tagja minden sorból tartalmaz egy szorzótényezőt, ezért minden tagban fellép a 0 szorzótényezőként. Minden tag 0 ⇒ a det. is 0.

Megj.: Ha egy determináns minden eleme 0 ⇒ a determináns értéke 0.

III., Ha egy determináns valamelyik sorát megszorozzuk egy $\lambda \in T$ elemmel, akkor a determináns értéke is szorzódik λ-val.

BIZ.: Mivel a det. minden tagja minden sorból tartalmaz egy szorzótényezőt, ezért minden tagban fellép a λ szorzótényező, tehát a determináns valóban λ-val szorzódik.

Következmény: 1., A det. soraiból (v. oszlopaiból a közös) szorzótényező a det. elé kiemelhető.

2., Ha egy n-edrendű det. minden sorát

megszorozzuk: $\lambda \in T$-vel, akkor a det. értéke λ^n-nel szorzódik.

IV., Ha egy det-ban két sort felcserélünk, akkor a det. értéke (-1)-gyel szorzódik.

BIZ.:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

cseréljük fel a k. és j. sorát.

Legyen az eredeti det.-nak $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots a_{ki_k} \cdot a_{ji_j} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}$ egy tagja. Ezek a tényezők a det. minden sorából és oszlopából egyet tartalmaznak. Ha a két sort felcseréljük, akkor ezek a tényezők továbbra is a det. különböző soraiból és oszlopaiból kerülnek ki, ezért a felcserélt sorú determináns tagja lesz.

Előjele: $a_{1i_1} \dots a_{ki_k} \cdot \dots a_{ji_j} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}$, $a_{1i_1} \cdot \dots a_{2i_2} \cdot \dots a_{ji_j} \cdot \dots a_{ki_k} \cdot \dots a_{ni_n}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots k & \dots & j & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots i_k & \dots & i_j & \dots & i_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \dots 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_j & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Ha ebben a perm-ban a i_j és i_k elemeket felcseréljük, akkor az eredeti perm-t kapjuk. De ismert, hogyha egy perm-ban két elemet felcseréltünk, a perm. paritása megváltozik. Ezért az eredeti det. minden tagja ellentétes előjellel szerepel a felcserélt sorú det-ban. Ez azt jelenti, hogy a det. értéke (-1)-gyel szorzódik.

V., Ha egy det-ban két sor elemei rendre egyenlőek, akkor a det. értéke 0.

$$\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ l \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = d$$

BIZ.: $(D=0)$

Cseréljük fel a det-ban a két azonos sort. Az előző tulajdonság értelmében a det értéke (-1)-gyel szorzódik. De a két sor felcserélése a det-t nem változtatja meg $\Rightarrow$

$$d = -d \quad \text{teljesül.}$$
$$\Updownarrow$$
$$2d = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$d = 0. \checkmark$$

Következmény: Ha egy det. két arányos sort tartalmaz $\Rightarrow$ a det értéke $\emptyset$.

VI.,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \overset{D_1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} + \overset{D_2}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Ha egy n-edrendű det k. sorának minden egyes eleme kéttagú összeg, akkor a det. két olyan n-edrendű det. összegére bontható, amelyek a k. sor kivételével megegyeznek az eredeti det. soraival, a k. sorban pedig az első tagban rendre az összegek első tagjai, a második det. k. sorában pedig rendre az összeg második tagjai állnak.

BIZ.:

$$D = \sum_{\binom{1\,2\,\dots\,n}{i_1\,i_2\,\dots\,i_n}\in P_n} (-1)^I a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ldots\cdot(a_{ki_k}+b_{ki_k})\cdot\ldots\cdot a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{\binom{1\,2\,\dots\,n}{i_1\,i_2\,\dots\,i_n}\in P_n} (-1)^I a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ldots\cdot a_{ki_k}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n} + \sum_{\binom{1\,2\,\dots\,n}{i_1\,i_2\,\dots\,i_n}\in P_n} (-1)^I a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot b_{ki_k}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n} =$$

$$:= D_1 + D_2$$

VII., A det értéke nem változik, ha valamelyik sorának λ $(\in T)$ szorosát egy másik sorához hozzáadjuk.

BIZ.:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1}+\lambda a_{l1} & a_{k2}+\lambda a_{l2} & \dots & a_{kn}+\lambda a_{ln} \\ \vdots & & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Az előző tulajdonság értelmében:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{l1} & \lambda a_{l2} & \dots & \lambda a_{ln} \\ \vdots & & & \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{0\text{, mert 2 sora arányos}} = D$$

VIII., Ha egy n-edrendű det-ban a főátlóban elhelyezkedő elemek kivételével valamennyi elem 0, akkor a det. értéke egyenlő a főátlóban elhelyezkedő elemek szorzatával.

BIZ:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{nn}$$

Mivel az n-edrendű det minden tagja, minden sorból és oszlopból 1-1 szorzótényezőt tartalmaz, ezért $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots$ $\dots \cdot a_{nn}$ tag kivételével a det. többi tagja 0, ezért igaz a tulajdonság.