

14. tétel

A determináns fogalma és elemei tulajdonságai

Másodrendű determináns:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ezen mátrix determinánsán eljűl

$$D = \det A = |A| = |(a_{ij})_{2 \times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \in \mathbb{T}$$

(A főátlóbeli elemet sorától levonjuk a melléátlóban elhelyezkedő elem sorát.)

Megj.: A mátrix táblázat, a determináns egy test beli elem.

pl.:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$|A| = D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -18 - 35 = -53$$

Harmadrendű determináns:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ezen mátrix determinánsa alatt eljűl (és 3-adrendű determinánsnak nevezzük):

$$D = \det A = |A| = |(a_{ij})_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

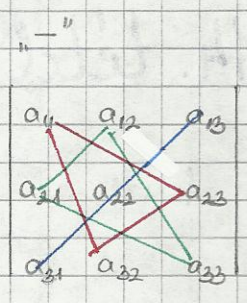
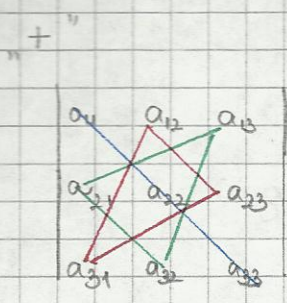
$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \in \mathbb{T} = \sum_{\substack{(123) \\ (i_1 i_2 i_3) \in \mathcal{P}_3}} (-1)^J a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot a_{3i_3}$$

$$J: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$$

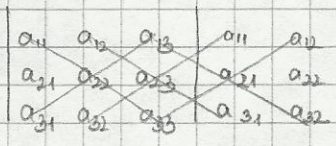
\Rightarrow a perm-ban az inverzió száma

3 elem permutációjában a

balra $\frac{1}{1}$

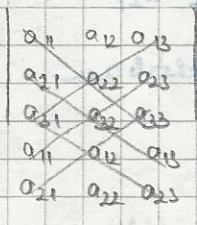


Sarrus - szabály:



A főátló és a vele || átló a ⊕ előjelűek.

A melléátló és a vele || átló a ⊖ előjelűek.



Mj.: Néha beülünk elsőadű determinánsból is. Ez a mátrixhoz
kapott első T-beli elem.

$$A = (a_{ij})$$

pl.:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 5 = \underline{\underline{-11}}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = | \det(A) | = |A| = A \cdot \det(A) = 0$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Az n-edrendű determináns fogalma és tulajdonságai:

..510

Def.: Az $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ T test fölötti $n \times n$ -es mátrixból

értelmezett n-edrendű determinánson a következőt értjük:

$$D = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{P}_n} (-1)^J a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

ahol \mathcal{P}_n jelenti az $1, 2, \dots, n$ elemek összes permutációinak halmazát, J jelenti a $\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ i_1, i_2, \dots, i_n \end{pmatrix}$ permutációban az inverzió számát.

Az n-edrendű determináns tehát $n!$ tagból álló algebrai összeg, amelynek tagjai az összes olyan n tagú szorzat, amelyek minden sorból és minden oszlopból 1-1 tagot tartalmaznak, a tag előjele pedig \oplus v. \ominus aszerint, hogy az indexek permutációja páros v. páratlan.

Megj.: A definíció $n = 3, 2, 1$ esetében az előzőekben tárgyalt harmad-, másod- és elsőrendű determinánst jelenti.

TULAJDONSÁGAI:

1., det.-val is benézünk transzponáltjából.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} ; \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A determináns értéke egyenlő a transzponált det. értékével.

$$D = D^T$$

direkt módon is bebizonyosítható !!

312.:

$$D = \sum_{\substack{(1, 2, \dots, n) \\ (i_1, i_2, \dots, i_n) \in P_n}} (-1)^J a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}$$

$$D^T = \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_n) \\ (1, 2, \dots, n)}} (-1)^{J'} a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdot \dots \cdot a_{j_n n}$$

$J: \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ perm. inverzió sáma

Mindkét det - ban a tagok ugyanazon elemekből képzett n kéncős sorokból. Mindkettőben a kéncős a det. minden sorából és onlopából egyet tartalmaznak. Ezért a D det. minden egyes tagjának van egy megfelelő tagja a D^T det - ban, amelyet csak a kéncős sorrendjében különböztet meg egymástól.

Vizsgáljuk meg, h. milyen az előjele!

Legyen $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}$ a D det. tagjának megfelelő tagja $a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdot \dots \cdot a_{j_n n}$ tag (itt a kéncősök csak a sorrendben térnek el)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Ha a (j_1, j_2, \dots, j_n) elemeket átrendezzük úgy, hogy $(1, 2, \dots, n)$ sorrendbe kerüljenek, akkor az $(1, 2, \dots, n)$ onlopindexek sorrendje (i_1, i_2, \dots, i_n) sorrendbe kerül.

Ez azt jelenti, h. $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ perm. egyenlő $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

\Downarrow mindkettő az következik

$(1, 2, \dots, n)$ és (i_1, i_2, \dots, i_n) permutációk egymás inverzei

(Ha egymás inverzei \Rightarrow azonos a paritásuk). Ez azt jelenti, h. D determináns minden egyes tagja azonos előjellel szerepel a D^T determinánsban. Vagyis $D = D^T$.

Megj.: Ebből a tulajdonságból következik, h. minden tulajdonság, amely igaz a det. soraira, igaz a det. oszlopaira is. Ezeket leggyakrabban sorokra megfogalmazni a tulajdonságot.

I. Ha egy det. valamely sorában minden elem 0, akkor a det. értéke is 0-val egyenlő.

BIZ.: A det. minden egyes tagja minden sorból tartalmaz egy sorókegyezőt, ezért minden tagban fellep a 0 sorókegyezőt. Minden tag 0 \Rightarrow a det. is 0.

Megj.: Ha egy determináns minden eleme 0 \Rightarrow a determináns értéke 0.

III., Ha egy determináns valamelyik sorát megszorozzuk egy $\pi \in \mathbb{R}$ elemmel, akkor a determináns értéke is nöködik π -vel.

BIZ.: Mivel a det. minden tagja, minden sorból tartalmaz egy sorókegyezőt, ezért minden tagban fellep a π sorókegyező, tehát a determináns valóban π -vel nöködik.

Következmény: 1., A det. sorából i . oszlopából a i -edik sorókegyező a det. elválasztó.

2., Ha egy n -edrendű det. minden sorát

megszorozzuk $\lambda \in \mathbb{T}$ -vel, akkor a $\det \dots$ értéke λ^u -vel szorozódik.

10, Ha egy \det -ban van két sort felcserélünk, akkor a \det értéke (-1) -gyel szorozódik.

BIZ.:

$$\textcircled{1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2u} \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ju} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ku} \end{vmatrix}$$

Átszéljük fel a k . és j . sorra.

Legyen az eredeti \det -nak $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ji_j} \cdot a_{ki_k} \cdot \dots$

a_{ki_k} egy tagja. És a tényező a \det minden sorából

és onlopából egyet tartalmaz. Ha a két sort felcseréljük,

akkor ezek a tényezők továbbra is a \det különböző

soraiból és onlopaiból kerülnek ki, ezért a felszét sorok

determináns tagja lesz 0 got \dots

Előjele: $a_{1i_1} \cdot \dots \cdot a_{ki_k} \cdot \dots \cdot a_{ji_j} \cdot \dots \cdot a_{ku_k}$; $a_{1i_1} \cdot \dots \cdot a_{ji_j} \cdot \dots \cdot a_{ki_k} \cdot \dots \cdot a_{ku_k}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & j & \dots & u \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_j & \dots & i_u \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & u \\ i_1 & i_2 & \dots & i_j & \dots & i_k & \dots & i_u \end{pmatrix}$$

Ha ebben a perm-ban a i_j és i_k elemeket felcseréljük,

akkor az eredeti perm-t kapjuk. De ismert, hogyha egy perm-ban

két elemet felcserélünk, a perm. paritása megváltozik. Ezért az

eredeti \det minden tagja ellentétes előjellel szerepel a

felcserélt sorú \det -ban. És azt jelenti, hogy a \det értéke

értéke (-1) -gyel szorozódik.

U., Ha egy det-ban két sor elemei rendre egyenlők, akkor a det. értéke 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k & a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l & a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = d$$

BIZ.: (D=0)

Cserejűt fel a det-ban a két azonos sor. Az előző tulajdonság értelmében a det értéke (-1)-gyel szorzódik.

De a két sor felcserélése a det-t nem változtatja meg \Rightarrow

$d = -d$ helyesül.

$2d = 0$

$d = 0.$ ✓

Következmény: Ha egy det. két azonos sor tartalmaz \Rightarrow a det értéke 0.

VI.,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} + b_{k1} & a_{k2} + b_{k2} & \dots & a_{kn} + b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ha egy n-edrendű det & sorával minden egyes eleme i-edik tagjának összeg, akkor a det. két olyan n-edrendű det. összegére bontható, amelyeket a k. sor kivételével megegyeznek az eredeti det. sorával, a k. sorban pedig az első tagban rendre az összeg első tagjai, a második

det. i . sorában pedig rendre az összegek második tagjai állnak.

BIZ.:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \sum_{\substack{(1,2,\dots,n) \\ (i_1, i_2, \dots, i_n)}} (-1)^J a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot (a_{ii} + b_{ii}) \cdot \dots \cdot a_{ni_n} = \\ &= \sum_{\substack{(1,2,\dots,n) \\ (i_1, i_2, \dots, i_n)}} (-1)^J a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ii} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} + \sum_{\substack{(1,2,\dots,n) \\ (i_1, i_2, \dots, i_n)}} (-1)^J a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot b_{ii} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} = \end{aligned}$$

$= \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$

Ugy, a det értéke nem változik, ha valamelyik sorhoz $\lambda \in \mathbb{R}$ sorát egy másik sorhoz hozzáadjuk.

BIZ.:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e1} & a_{e2} & \dots & a_{en} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{e1} & a_{i2} + \lambda a_{e2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{en} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e1} & a_{e2} & \dots & a_{en} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Az előző tulajdonság értelmében:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e1} & a_{e2} & \dots & a_{en} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\mathcal{D}} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{e1} & \lambda a_{e2} & \dots & \lambda a_{en} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e1} & a_{e2} & \dots & a_{en} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{0, \text{ mert 2. sora arányos}} = \mathcal{D}$$

viii., Ha egy n -esrendű det.-ban a főátlóban elhelyezkedő elemét kivételével valamennyi elem 0, akkor a det. értéke egyenlő a főátlóban elhelyezkedő elemek szorzatával.

BIZ:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{nn}$$

Mivel az n -esrendű det. minden tagja, minden sorból és oszlopból 1-1 szorzótagot tartalmaz, ezért $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$ tag kivételével a det. többi tagja 0, ezért igaz a teljesség.