13. tétel

A mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal.

Legyen $(T, +, \cdot)$ test.

Def.: A T test $n \times m$ számú elemének n sorba és m oszlopba történő téglalap alakú elrendezését $n \times m$ típusú mátrixnak nevezzük a T test fölött.

jel.:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}, & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{ij} \in T \\ \\ i = 1, 2 \dots n \\ j = 1, 2 \dots m \end{array}$$

Beszélünk a mátrix sorairól és oszlopairól. Az i-t sorindexnek, a j-t oszlopindexnek nevezzük. Az a_{ij} tehát a mátrix i-dik sorának j-dik eleme.

Ha a mátrix n sort és n oszlopot tartalmaz $\exists$ $n \times n$ típusú négyzetes (kvadratikus) mátrixról beszélünk.

Gyakran a mátrixot kiírás helyett így jelölik:

$$(a_{ij})_{n \times m} = A_{n \times m} = \underset{n \times m}{A} = A$$

Megj.: Tehát a mátrix egy olyan táblázat, amelynek elemei a T testből valók.

Megj.: Egy mátrix akkor ismert, ha tudjuk milyen alakú, azaz tudjuk a típusát, és azt, hogy a m.-ban az egyes helyeken a T test mely elemei állnak.

Azt a m-ot, amelynek valamennyi eleme 0, NULLMÁTRIXnak nevezzük. (vagy zérusmátrix) jel.: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (0)_{n \times m}$ Bármilyen típusú lehet.

Def.: $(a_{ij})_{n \times m} = (b_{ij})_{n \times m} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$

$(i = 1,2 \dots n \; , \; j = 1,2 \dots m)$

(Azaz: a mátrixok egyenlősége csak azonos típusú mátrixokra értelmezett. Két azonos típusú mátrix egyenlő $\Leftrightarrow$, ha a két mátrixban a megfelelő helyen álló elemek rendre egyenlők.)

Műveletek:

1., összeadás:

Def.: $(a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m} := (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m}$

$(i = 1,2 \dots n \; , \; j = 1,2, \dots m)$

Csak azonos típusú mátrixokra értelmezett az összeadás. Két azonos típusú mátrixot úgy adunk össze, hogy a megfelelő helyen álló elemeket rendre összeadjuk.

Az $n \times n$ típusú mátrixok körében az összeadás algebrai művelet.

Tétel: Az $n \times m$ típusú mátrixok körében az „+" kommutatív (a.,) és asszociatív (b.,).

BIZ.: a., $(a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m} := (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} =$

$= (b_{ij} + a_{ij})_{n \times m} := (b_{ij})_{n \times m} + (a_{ij})_{n \times m}$

mert az „+" T-ben komm.

b., hasonlóképpen bizonyítható.

13/2

Mátrix szorzása T-beli elemmel (skalárral)

Legyen $a \in T$.

Df.: $a \cdot (a_{ij}) := (a \cdot a_{ij})$ $(i = 1,2 \dots n \;,\; j = 1,2 \dots m)$

A mátrix minden egyes elemét megszorozzuk a-val.

Mj.: - A def. nem tünteti fel a mátrix típusát, mert tetszőleges típusú lehet.

- T-beli elemmel (skalárral) úgy szorzunk, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk T-beli elemmel.

- A mátrix skalárral való szorzása nem algebrai művelet a mátrixok körében, mert egy T-beli elemhez és mátrixhoz mátrixot rendel.

Tétel: Mátrixok skalárral való szorzására teljesülnek a köv tulajdonságok.

I., $a \cdot (a_{ij}) = (a_{ij}) \cdot a$ $\quad a \in T$

II. $(a+b)(a_{ij}) = a \cdot (a_{ij}) + b \cdot (a_{ij})$ $\quad a, b \in T$

III. $a\,[(a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m}] = a \cdot (a_{ij})_{n \times m} + a \cdot (b_{ij})_{n \times m}$ $\quad a \in T$

IV. $ab\,(a_{ij}) = [b\,(a_{ij})]\,a = b\,[a\,(a_{ij})]$ $\quad a, b \in T$

V. $1\,(a_{ij}) = (a_{ij})$ $\quad 1 \in T$

Biz.:

I., V., a def következménye: TRIVI

II., $(a+b)(a_{ij}) := ((a+b)\,a_{ij}) = (a \cdot a_{ij} + b \cdot a_{ij}) =$

$= (a \cdot a_{ij}) + (b \cdot a_{ij}) := a \cdot (a_{ij}) + b\,(a_{ij})$

Tétel: Az $n \times m$ típusú T test fölötti mátrixok halmaza az „+"-ra nézve Abel-csoportot alkot.

BIZ.: Be kell látni, h. a T test fölötti $n \times m$ típusú mátrixok körében az „+" asszociatív, kommutatív és invertálható.

A kommutativitást már beláttuk korábban. (+ asszoc. is)

Azt kell belátni, h. a szorzásnak ∃ neutrális eleme és ∀ elemnek ∃ inverze.

· Tekintsük az $n \times m$ típusú zérusmátrixot. Ez olyan $(a_{ij})_{n \times m} + (0)_{n \times m} = (a_{ij})_{n \times m}$, azért az $(0)_{n \times m}$ hozzáadva a mátrixot kapja.

· Neutrális elem: additív zérus az „+"-ra nézve.

$-1\,(a_{ij})_{n \times m} = (-a_{ij})_{n \times m}$

$(a_{ij})_{n \times m}$ mátrix additív inverze a $(-a_{ij})_{n \times m}$, mert $(a_{ij})_{n \times m} + (-a_{ij})_{n \times m} = (0)_{n \times m}$.

Tehát minden $n \times m$ típusú mátrixnak van additív inverze, ⇒ a T test fölötti mátrixok körében az „+" invertálható.

II. Kivonás:

Def.: $(a_{ij})_{n \times m} - (b_{ij})_{n \times m} := (a_{ij})_{n \times m} + (-b_{ij})_{n \times m} = (a_{ij} - b_{ij})_{n \times m}$

$(i = 1, 2 \ldots n, \quad j = 1, 2 \ldots m)$

A kivonás csak azonos típusú mátrixokra érvényes.

Két mátrixot úgy vonunk ki, hogy a megfelelő helyen álló elemeket kivonjuk egymásból.

III. Szorzás:

Def.: $(a_{ij})_{n \times m} \cdot (b_{ij})_{m \times p} := (c_{ij})_{n \times p}$, ahol $c_{ij} := \sum_{t=1}^{m} a_{it} \cdot b_{tj}$

$(i = 1, 2 \ldots n, \quad j = 1, 2 \ldots m)$

13/4

Megj.:

1) Két mátrix szorzata csak olyan mátrixokra van értelmezve a def. szerint, ahol a baloldali tényezőknek annyi oszlopa van, amennyi sora a jobb oldalinak.

2) Szorzat mátrix típusai a bal oldali tényezők sorai és a jobb oldali tényezők oszlopai szorzatával egyenlő.

3) A def. szerint a szorzat mátrix i-dik sorának j-dik elemét úgy kapjuk meg, hogy a bal oldali mátrix i-dik sorának elemeit rendre megszorozzuk a jobb oldali mátrix j-dik oszlopának elemeivel és ezeket összeadjuk.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 10 \\ 7 & -6 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Tétel: A mátrixok szorzására teljesülnek a következő tulajdonságok:

1., Mátrixok szorzása <u>NEM</u> kommutatív tulajdonságú, sőt, lehet, h. a mátrixok szorzása fordított sorrendben el sem végezhető a mátrixok típusa miatt.

Példa:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} = \overset{C}{\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

$$\overset{B}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} = \overset{D}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 26 & 9 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \qquad A\cdot B \neq B\cdot A$$

II., A mátrixok szorzása asszociatív tulajdonságú, feltéve, hogy a műveletek elvégezhetők.

$$\left[(a_{ij})_{n\times m} \cdot (b_{ij})_{m\times p} \right] \cdot (c_{ij})_{p\times r} = (a_{ij})_{n\times m} \left[(b_{ij})_{m\times p} \cdot (c_{ij})_{p\times r} \right]$$

III, Mátrixok szorzása a mátrixok összeadására nézve mindkét oldaltól disztributív. Ha a műveletek elvégezhetőek.

a, $$[(a_{ij})_{n\times m} + (b_{ij})_{n\times m}]\cdot(c_{ij})_{m\times p} = (a_{ij})_{n\times m}\cdot(c_{ij})_{m\times p} + (b_{ij})_{n\times m}\cdot(c_{ij})_{m\times p}$$

jobbról disztributív.

BIZ.:

$$[(a_{ij})_{n\times m} + (b_{ij})_{n\times m}]\cdot(c_{ij})_{m\times p} = (a_{ij}+b_{ij})_{n\times m}\cdot(c_{ij})_{m\times p} =$$
$$= \Big[\sum_{t=1}^{m}(a_{it}+b_{it})\cdot c_{tj}\Big]_{n\times p} = \Big(\sum_{t=1}^{m} a_{it}\cdot c_{tj} + \sum_{t=1}^{m} b_{it}\cdot c_{tj}\Big)_{n\times p} =$$
$$= \Big(\sum_{t=1}^{m} a_{it}\cdot c_{tj}\Big)_{n\times p} + \Big(\sum_{t=1}^{m} b_{it}\cdot c_{tj}\Big)_{n\times p} = (a_{ij})_{n\times m}\cdot(c_{ij})_{m\times p} +$$
$$+ (b_{ij})_{n\times m}\cdot(c_{ij})_{m\times p}$$

b, $$(a_{ij})_{n\times m}\cdot[(b_{ij})_{m\times p} + (c_{ij})_{m\times p}] = (a_{ij})_{n\times m}\cdot(b_{ij})_{m\times p} + (a_{ij})_{n\times m}\cdot(c_{ij})_{m\times p}$$

balról disztributív

Speciális mátrixok:

pl.:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

mellékátló

főátló

1, Egy kvadratikus mátrixot DIAGONÁL(IS) mátrixnak nevezünk, ha csak a főátlója tartalmaz zérustól különböző elemet.

pl.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

II., Egy diagonális mátrixot EGYSÉGMÁTRIXnak nevezzük, ha a főátlójában csupa egyes szerepel.

pl.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}) = E_{n\times n}$ $\qquad (\delta_{ij}) = \begin{cases} 1, \text{ha } i=j \\ 0, \text{ha } i\neq j \end{cases}$

δ_{ij}: KRONECKER-féle delta

III., PERMUTÁLÓ MÁTRIXnak nevezzük azt a kvadratikus mátrixot, amely az egységmátrixból sorok v. oszlopok más sorrendű felírásával állhat elő.

pl.: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$

IV., HÁROMSZÖG v. TRIANGULÁRIS mátrixnak nevezzük nevezzük azt a kvadratikus mátrixot, amelynek a főátlója alatt v. felett csupa 0 áll.

pl.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ felső Δ mátrix $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ alsó Δ mátrix

V., Egy kvadratikus mátrixot SZIMMETRIKUSnak nevezzük, ha elemei a főátlóra szimmetrikusan helyezkednek el.

pl.: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -7 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

VI., Egy kvadratikus mátrixot NILPOTENS mátrixnak nevezzük, ha $\exists$ olyan természetes szám, amelyre a mátrixot hatványozva a zérusmátrixot kapjuk.

$A_{n\times n} \qquad A^{k}_{n\times n} = (0)_{n\times n} \qquad k \in \mathbb{N}$

VII., Egy kvadratikus mátrixot PROJEKTOR v. VETÍTŐ mátrixnak nevezünk, ha a mátrix minden pozitív egész kitevős hatványa az adott mátrixszal egyenlő.

$$P = P^2 = P^3 = \dots = P^n$$

VIII., Egy kvadratikus mátrixot KONTINUÁNS mátrixnak nevezünk, ha csak a főátlójában, és az azzal párhuzamos átlókban szerepel zérustól különböző elem.

Pl.:
$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 7 \end{matrix}$$

Az n^2 rangú teljes mátrixgyűrű:

$n \times n$ típusú T test fölötti mátrixok körében az „+" és a „·" (skalárral való szorzás) mind elvégezhető.

Tétel: A T test fölötti $n \times n$ típusú mátrixok halmaza mátrixok összeadására és szorzására nézve gyűrűt alkot, amely gyűrű általában nem kommutatív, de egységgyűrű (egységelemes gyűrű).

BIZ.: Be kell látni:

a; „+" kommutatív

b; „+" asszociatív

c; „+" invertálható (mert $(0)_{n\times n}$ neutrális elem, és $(a_{ij})_{n\times n}$ additív inverze: $(-a_{ij})_{n\times n}$

d; „·" általában nem kommutatív

e; „·" asszociatív

f; „·" az „+"-ra nézve disztributív

$(\delta_{ij})_{n\times n} = E_{n\times n} \Rightarrow$ a szorzásra vonatkozó neutrális elemc, tehát egységelemc

Ezt az $n\times n$-es T test fölötti mátrixgyűrűt n^2 rangú teljes mátrixgyűrűnek nevezzük.

Mátrixok transzponáltja:

Def.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

Ezen T test fölötti mátrix transzponáltján értjük azt a mátrixot, amelynek sorait az adott mátrix oszlopai alkotják az adott sorrendben. (jel: $A^T = A^t = A^*$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (a_{ij})^T_{n\times m} = (a_{ji})_{m\times n}$$

Pl.:
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}^T_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Megj.: Kvadratikus mátrix transzponáltja nem más, mint a mátrix főátlóra való tükrözött mátrixa.

pl.:
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Mátrixok transzponáltjának képzésére teljesülnek a következő tulajdonságok:

1., $[\underbrace{(a_{ij})_{n\times m}} + \underbrace{(b_{ij})_{n\times m}}]^T = (a_{ij})^T_{n\times m} + (b_{ij})^T_{n\times m}$ $\qquad (A+B)^T = A^T + B^T$

azonos típusú mátrixnak kell szerepelni az „+" miatt

BIZ.:

$$\left[(a_{ij})_{n\times m}+(b_{ij})_{n\times m}\right]^T \underset{\downarrow}{:=} (a_{ij}+b_{ij})^T_{n\times m} \underset{\downarrow}{:=} (a_{ji}+b_{ji})_{m\times n} =$$

összeadás def. sz. transzponált def. sz.

$$= (a_{ji})_{m\times n} + (b_{ji})_{m\times n} = (a_{ij})^T_{n\times m} + (b_{ij})^T_{n\times m}$$

II., $\left[(a_{ij})_{n\times m}\cdot(b_{ij})_{m\times p}\right]^T = (b_{ij})^T_{m\times p}\cdot(a_{ij})^T_{n\times m}$ $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

$1\times m$: $(a_{1}, a_{2}, \ldots, a_{m})$ Ezt sormátrixnak v. vektormátrixnak nevezzük.

↳ sorvektor

$n\times 1$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ Ezt oszlopmátrixnak v. oszlopvektornak hívjuk.

A sormátrix transzponáltja az oszlopmátrix.