12. tétel

Negyedfokú egyenletek. Alacsonyabb fokúra redukálható algebrai egyenletek. Két egyenlet közös gyökei, egy egyenlet többszörös gyökei. Reciprokegyenlet.

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \qquad a\neq 0 \qquad a,b,c,d,e\in\mathbb{C}$$

$$x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}=0$$

$$x := y-\frac{b}{4a}$$

$$y^4+\underbrace{(\dots)}_{0}y^3+\underbrace{(\dots)}_{p}y^2+\underbrace{(\dots)}_{q}y+\underbrace{(\dots)}_{r}=0$$

$$\boxed{y^4+py^2+qy+r=0}$$

Elegendő az $x^4+px^2+qx+r=0$ egyenlet megoldásával foglalkozni.

1., $q=0$ $\quad x^4+px^2+r=0$

$$t=x^2 \Rightarrow t^2+pt+r=0 \to t_1 \to x_1, x_2; \quad t_2 \to x_3, x_4$$

2., $r=0$ $\quad x(x^3+px+q)=0$

$x_4=0$; $\quad x_1, x_2; x_3$

3., $q\cdot r\neq 0$ $\quad x^4+px^2+qx+r=(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)=0$

$$x^2+ax+b=0 \qquad x^2-ax+c=0$$

x^4 : $1=1$

x^3 : $0=0$

x^2 : $p=b+c-a^2$

x^1 : $q=ac-ba$

x^0 : $r=b\cdot c$

$$\left.\begin{aligned} a^2+p &= b+c \\ \frac{q}{a} &= -b+c \end{aligned}\right] \begin{aligned} + &\rightarrow c=\frac{1}{2}\left(p+\frac{q}{a}+a^2\right) \\ - &\rightarrow b=\frac{1}{2}\left(p-\frac{q}{a}+a^2\right) \end{aligned}$$

$$r=\frac{1}{2}\left(a^2+p+\frac{q}{a}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(a^2+p-\frac{q}{a}\right)$$

$$\vdots$$

$$r=a^6+(\dots)a^4+(\dots)a^2+(\dots)=0$$

$$t=a^2$$

rezolvens egyenlet: $r - \underbrace{t^3+(\dots)t^2+(\dots)t+(\dots)=0}$

$$\begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \\ a_{11}\ \ a_{12} & a_{21}\ \ a_{22} & a_{31}\ \ a_{32} \end{array}$$

csak előjelben térnek el

Elegendő hármat kiszámolni

a_{11}, a_{21}, a_{31}

$a_{11} \to b_1,\ c_1$

$$x^4+px^2+qx+r = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

Egy értéket kell kiszámolni, meghatározni a hozzá tartozó b-t és c-t. utána kell két másodfokú egyenletet felírni, melynek segítségével meghatározható a másik két gyök.

Tétel: (Rolle-tétel)

Az $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$ egész együtthatós egyenletnek csak olyan (nem egyszerűsíthető) $\frac{r}{s}$ racionális szám lehet gyöke, amelyre

$r \mid a_n$; $s \mid a_0$.

1.) $f(x)=0$ egyenlet bal oldalán álló $f(x)$ polinom legalább két polinom szorzata, azaz:

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

akkor az $f(x)=0$ egyenlet megoldása ekvivalens az

$$f_1(x)=0 \quad \text{és} \quad f_2(x)=0$$

egyenletek megoldásával. Így ebben az esetben az eredeti egyenletnél alacsonyabb fokú egyenletet kell megoldani.

2.) Racionális együtthatós egyenlet:

Ebből egy konstanssal (a nevező lkkt-vel) való szorzással mindig egész együtthatós egyenletet kapunk.

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_0 = 0.$$

Ennek megoldását a Rolle-tétel szerint kapjuk meg.

3.) $$f(x) = a_0 x^{kn} + a_1 x^{(k-1)n} + \ldots + a_{k-1} x^n + a_k = 0$$

alakú kn-edfokú egyenlet az $y = x^n$ helyettesítéssel az

$$a_0 y^k + a_1 y^{k-1} + \ldots + a_{k-1} y + a_k = 0$$

k-adfokú egyenlet megoldására vezethető vissza.

4.) Reciprok egyenlet:

Def.: $f(x)=0$ egyenlet reciprokegyenlet, ha $f(\alpha)=0$ esetén $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$ is teljesül azonos multiplicitással.

(ha α ötszörös gyök volt, $\frac{1}{\alpha}$ is ötszörös gyök lesz)

Df.: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ egyenletet szimmetrikusnak nevezzük, ha $a_n = a_0$

$a_{n-1} = a_1$; $a_{n-2} = a_2$ (együtthatói szimmetrikusak)

antiszimmetrikus, ha (előjelben térnek el az együtthatók) $a_n = -a_0$

$a_{n-1} = -a_1$

$a_{n-2} = -a_2$

Tétel: $f(x) = 0 \iff$ reciprokegyenlet, ha vagy szimmetrikus, vagy antiszimmetrikus.

Következmény: $f_1^\circ = 2m$, $f_1(x)$-nek szimmetrikusnak kell lenni.

(Mindig páros fokszámú és szimmetrikus)

Mj.: Gyökképlettel mindig megoldható reciprokegyenlet maximális fokszáma: 9)

(Olyan kilenced fokú egyenlet nincs, amelynek ± 1 ne lenne gyöke. $\Rightarrow$ 8-ad fokú egyenletet kapunk. Beosztunk 2-vel $\Rightarrow$ 4-edfokú egyenlet $\Rightarrow$ amely már megoldható.)