11. tétel

Komplex és valós együtthatós másod- és harmadfokú egyenletek.

I., Másodfokú egyenlet:

(1) $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, $a;b;c\in\mathbb{C}$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $\qquad$ $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

$D:=b^2-4ac$

Df.: $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, $a;b;c\in\mathbb{C}$

$\Updownarrow$

$\exists$ többszörös gyöke , ha a $D=0$

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$$

Df.: $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, $a;b;c\in\mathbb{R}$

$D=b^2-4ac$

(1) $D=0$ $\quad (x_1=x_2=-\frac{b}{2a}\in\mathbb{R})$

(2) $D>0$ $\quad \pm\sqrt{b^2-4ac}\in\mathbb{R}\Rightarrow x_1\neq x_2;\ x_1\in\mathbb{R};\ x_2\in\mathbb{R}$

(3) $D<0$ $\quad \sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{i^2\underbrace{(4ac-b^2)}_{>0}}\Rightarrow\pm i\underbrace{\sqrt{4ac-b^2}}_{\in\mathbb{R}}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$x_1\neq x_2$ $\qquad$ $x_1, x_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

II., Harmadfokú egyenlet:

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ $\quad /\cdot a$ $\quad a\neq 0$; $a,b,c,d\in\mathbb{C}$

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

$$x:=y-\frac{b}{3a}$$

$$\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{b}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{c}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}=0$$

$$y^3+\underbrace{\left(-\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\right)}_{0}y^2+\underbrace{(\ldots)}_{:=p}y+\underbrace{(\ldots)}_{q}=0$$

$$y^3+py+q=0$$

Elegendő az $x^3+px+q=0$ $(p,q\in\mathbb{C})$ típusú egyenletekre megoldóképletet keresni, és azt levezetni.

1., $p=0 \Rightarrow x^3=-q$

$$x_{123}=\sqrt[3]{-q}$$

2., $q=0 \Rightarrow x^3+px=0$

$$x(x^2+p)=0$$

$$x_1=0 \qquad x_{23}=\pm\sqrt{-p}$$

3., $pq\neq 0$

Az algebra alaptétele miatt $\exists\, z\in\mathbb{C}$, hogy $z^3+pz+q=0$.
Keressük z-t $z=u+v$ alakban, ahol $u,v\in\mathbb{C}$.

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0.$$

$$u^3+3u^2v+3v^2u+v^3+p(u+v)+q=0$$

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0$$

$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0.$$

Legyen $3uv=-p$, mert $3uv+p=0 \Rightarrow$ ettől a lehető legegyszerűbb. (Sehonnan nem következik a lehetősége annak, hogy z-t egy „szabadságnyi joggal" ruháztuk fel.

$uv = -\frac{p}{3}$

$u^3+v^3=-q$ $\quad ()^3$

$u^3\cdot v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$

Írjuk fel azt a (másodfokú) $t^2+bt+c=0$ egyenletet, amelynek $t_{12}=u^3, v^3$ a gyökei.

$t^2+qt-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$

gyökök és együtthatók összefüggése alapján

$$t_{12}=u^3, v^3 = \frac{-q\pm\sqrt{q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$u_{123}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\quad ; \quad v_{123}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\boxed{z=u_{123}+v_{123}} \Rightarrow z_{123\ldots 9}$$

DE: $3u_i\cdot v_i=-p$

$\underbrace{\qquad\qquad}$

kiszámítjuk: u_1, u_2, u_3

$v_1=\frac{-p}{3u_1}$; $v_2=\frac{-p}{3u_2}$; $v_3=\frac{-p}{3u_3}$

$$z=\underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}_{u_i}+\underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}_{v_i} \Rightarrow \text{3-adfokú egyenlet megoldóképlete}$$

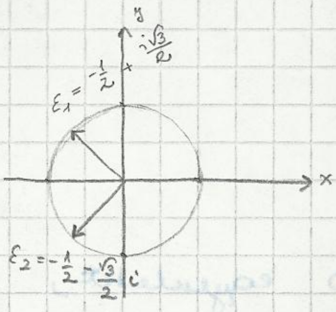
$u_i v_i = \frac{-p}{3}$

Cardano-formula:

Legyen $u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ egy konkrét érték $v_1=\frac{-p}{3u_1}$

$u_2=u_1\cdot\varepsilon_1 \Rightarrow v_2=\frac{-p}{3u_2}=\frac{-p}{3u_1\cdot\varepsilon_1}\cdot\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2}=\frac{-p}{3u_1}\cdot\varepsilon=v_1\cdot\varepsilon_2$

$u_3=u_2\cdot\varepsilon_2 \Rightarrow v_3=\ldots=v_1\cdot\varepsilon_1$



$$z_1 = u_1 + v_1$$

$$z_2 = u_2 + v_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) u_1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot v_1 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) + \frac{\sqrt{3}}{2} i (u_1 - v_1)$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) - \frac{\sqrt{3}}{2} i (u_1 - v_1)$$

A fel.: z_1, z_2, z_3 valóban megoldás

$$z_1 + z_2 + z_3 = \dots = 0 \checkmark$$

$$z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_3 = \dots = p \checkmark$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \dots = -q \checkmark$$

Az összeg a négyzetes tag együtthatója.

A harmadfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$x^3 + px + q = 0$$

$$D := -108\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]$$

Tétel: $x^3 + px + q = 0 \Leftrightarrow \exists$ egyenlő gyöke, ha $D = 0$.

$x^3 + px + q = 0$; $pq \neq 0$; $p, q \in \mathbb{R}$

a, $D = 0$

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \in \mathbb{R}$$

$$v_1 = \frac{-p}{3u_1} \in \mathbb{R}$$

$$z_1 = u_1 + v_1 \in \mathbb{R}$$

$$z_2 = -u_1 \in \mathbb{R}$$

$$z_3 = -u_1 \in \mathbb{R}$$

b., $D<0$ $\quad \left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\in\mathbb{R}$$

$$u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\in\mathbb{R}$$

$$v_1=-\frac{p}{3u_1}\in\mathbb{R}$$

$$z_1=u_1+v_1\in\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} z_2 &= \quad \in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\\ z_3 &= \quad \in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\end{aligned}\right\} z_2=\overline{z_3}$$

c., $D>0$ $\quad \left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0 \Rightarrow p<0$

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=-\frac{q}{2}+i\underbrace{\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}_{>0}$$

$$|u^3|=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)=\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

(megj.: komplex szám abszolútértéke: képzetes rész négyzete + szám rész négyzete, és ennek az összegnek a gyöke.)

$$|u|=\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

$$v=-\frac{p}{3u}\cdot\frac{\overline{u}}{\overline{u}}=-\frac{p}{3|u|^2}\cdot\overline{u}$$

$$v=\overline{u}$$

$u=a+bi$ $\qquad v_1=a-bi$

$$z_1=u_1+v_1=2a\in\mathbb{R}$$

$$z_2=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1)=-a-b\sqrt{3}\in\mathbb{R}$$

$$z_3=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1)=-a+b\sqrt{3}\in\mathbb{R}$$

$x_1\neq x_2 \qquad x_1\neq x_3 \qquad x_2\neq x_3$

Amennyiben a $D>0$, 3 db különböző valós gyöke van a harmadfokú egyenletnek.

Casus irreducibilis: nem visszavezethető eset.

(Nem oldható meg ennek az egyenlet-nek a visszavezetése a valós számok halmazán, a komplex számok kiküszöbölése nélkül.)

Lehet olyan megoldást konstruálni, amiben nincs komplex szám, de az nem algebrai úton történik.

Casus irreducibilis esetében trigonometriai megoldás adható.