20. tétel

Generátorrendszerek, bázisok, lineáris független vektorrendszerek

Def.: Legyen V T test fölötti vektortér.
V T test fölötti vektortér egy vektorrendszerét a vektortér generátorrendszerének nevezzük, ha a vektortér minden eleme előállítható ezen vektorrendszer elemeinek a lineáris kombinációjaként.

Megj.: n dimenziós vektortérben minden n rangú vektorrendszer generátorrendszer.

Def.: V T test fölötti vektortér minimális generátorrendszereit a vektortér bázisainak nevezzük. (Egy gr[1] minimális gr, ha ∀ elemét elhagyva a megmaradók már nem alkotnak gr-t.)

Def.: V T test fölötti vektortér véges számú vektorának összességét vektorrendszernek nevezzük, amelyben azonos vektorok is előfordulnak.
Két vektorrendszer egyenlő ⟺, ha ugyanazokból a vektorokból áll, ∅ és az egyes vektorok példányszámai is megegyeznek a két vr[2]-ben.

[2] vr : vektorrendszer
[1] gr : generátorrendszer

Def.: Egy vr-t lineárisan összefüggőnek nevezünk, ha van a vr-nek egy eleme, amely felírható a vr többi elemének lineáris kombinációjaként. Ellenkező esetben a vr. lineárisan független.

Tétel: Egy vektorból álló vr független $\Leftrightarrow$, ha a vektor nem zérusvektor.

Tétel: V T test fölötti vektortér $\forall$ vektora legfeljebb egyféleképpen állítható elő egy lineárisan független vr. elemeinek a lineáris kombinációjaként.

Tétel: Ha az $a_1, a_2 \dots, a_r, \dots a_n$ lineárisan független vr $\Rightarrow$ az $a_1, a_2 \dots, a_r$ vr. is lineárisan független.

Def.: V T test fölötti vektortér egy vr-ét maximálisan lineárisan független vr-nek nevezzük, ha lineárisan független, de a vtér $\forall$ vektorát hozzávéve a vr-hez már lineárisan összefüggő vr-t kapunk.

Megj.: A maximálisan lineárisan független vr. elemeinek a száma egyenlő a vektortér dimenziójával.

Tétel: A bázisok pontosan a független generátorrendszerek. (Minden bázis független generátorrendszer, és minden független generátorrendszer bázis.)

20/2

BIZ.:

1., Legyen V T test fölötti vektortérnek A egy bázisa. Ha A nem lenne lineárisan független, ⇒ van olyan $b \in A$, amelyik felírható az $A \setminus \{b\}$ vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként. De akkor a b. vr-t az A vr-ből elhagyva a megmaradók még generátorrendszert alkotnának. Ez pedig ellentmond annak, hogy A minimális gr. vagyis hogy A bázis.

II., Legyen A a V T test fölötti vtérnek lin. független gr-e. Ha valamelyik v-t elhagyva ebből a vr-ből még továbbra is gr lenne, akkor és az elhagyott v felírható lenne a megmaradt elemek lineáris kombinációjaként. Ez azonban lehetetlen, mert A lin. független vr volt. Tehát A min. gr, vagyis bázis.

Tétel: A bázisok pontosan a max. lineárisan független vektorrendszerek.

Következmény: A bázis elemeinek a száma egyenlő a vektortér dimenziójával.

BIZ.: ⇒ Legyen V T test feletti vektortérnek A bázisa. Az előző tétel értelmében A független gr. Ha A nem lenne maximális lin. független vr, akkor lenne a vtérnek olyan b eleme $(b \in V)$, hogy $A \cup \{b\}$ vr. lineárisan független lenne. De akkor a b vektor nem írható fel az A lin kombinációjaként, ami ellentmond annak, hogy A bázis. Ezzel bizonyítottuk, hogy minden bázis maximálisan lineárisan független vektorrendszer.

⇐ Legyen a U T test fölötti vektortérnek A maximálisan lineárisan független vektorrendszere. A generátorrendszere U-nak, mert A-hoz ∀ vektorát hozzávéve a vektortérnek már összefüggő vr-t kapunk, de akkor ez az elem kifejezhető az A vr elemeinek lineáris kombinációjaként.
Az A vr-ből egyetlenegy vektort sem lehet elhagyni, mert ha egy vektort is elhagynánk, akkor ez a vektor nem írható fel a megmaradt elemek lin. kombinációjaként. A tehát min. gr., vagyis bázis.

Tétel: Véges dimenziós vtérben minden lin. független vr. bázissá bővíthető.

BIZ.: Legyen U T test fölötti vektortér n dimenziós. Legyen továbbá A egy lin. független vr-e U-nak. Vegyünk hozzá A-hoz egyesével a vektortérből elemeket úgy, hogy minden lépésnél lin. független vr-t kapunk. Két eset lehetséges.

I. Vagy nem tudunk már hozzávenni egy vektort sem A-hoz úgy, hogy független vektorrendszerhez jussunk. Ekkor A max. lin. független vr, azaz bázis.

II. Véges lépésben eljutunk odáig, hogy max. lin. független vr. keletkezik (mert elemeinek a száma: n), ezért bázishoz jutunk. jel.: dim U = n

20/4