19. tétel

Vektortér dimenziója, vektorrendszer rangja. A lineáris függőség alaptétele, vektorendszer ekvivalenciája.

Def.: Azt mondjuk, hogy a U T test fölötti vektortér n dimenziós ($n \in \mathbb{N}$), ha a vektortérből kiválasztható legalább egy n elemű lin. független vr, de a kiválasztható $n+1$ vr-ek már mind lin. összefüggők.

Ha egy U T test fölötti vektortér tartalmaz zérusvektortól különböző vektort és semmilyen n ($n \in \mathbb{N}$)-re sem n dimenziós $\Rightarrow$ a vektorteret végtelen dimenziósnak hívjuk.

Def.: Egy U T test fölötti vektorteret véges dimenziójúnak nevezzük, ha valamely $n \in \mathbb{N}$-re n dimenziós.

jel.: dim U, dim(U).

Tétel: n dimenziós vektortérben $\forall$ vektor egyértelműen írható fel a vektortér egy n elemű lin. független vektorrendszere elemeinek a lin. kombinációjaként.

BIZ.: Legyen $\dim U = n$ $\Rightarrow$ kiválasztható a vektorrendszerből egy lin. független vr-e.

legyen $a_1; a_2; \dots; a_n$

legyen $b \in U$ tetszőleges

Tekintsük az $a_1; a_2; \dots; a_n; b$ vr-t, mivel ez a vr $n+1$ elemű $\Rightarrow$ lin összefüggő, ezért a b vektor felírható úgy, hogy

$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ $(\lambda_i \in T)$ az utolsó tétel értelmében.

Az utóbbi tétel értelmében ez a felírás egyértelmű.
Mivel 1 vektor legfeljebb egyféleképpen írható fel, egy lin. független vektor elemeinek lin. kombinációjaként.

Mj.: Egy vektortér dimenziója 0 is lehet.
$U = \{0\}$, T; $\dim U = 0$
Ha egy vektortér tartalmaz zérusvektortól különböző vektort is $\Rightarrow$ a dimenziója legalább egy.

Mj.: I.) A vektortér dimenziójának definíciójából következik, hogyha a vt[1] n dimenziós $\Rightarrow$ a vt valamennyi n-nél több elemet tartalmazó vr-e összefüggő.
II.) Vt-ben és vr-ben sem vagyunk tekintettel az elemek sorrendjére.

A vektortér dimenziójához hasonló fogalom a vektorrendszerek körében a rang fogalma.

Def.: Azt mondjuk, hogy az $a_1; a_2 \dots ; a_s$ $(a_i \in T)$ $(i = 1, 2 \dots s)$ vr rangja r, ha a vr-ből kiválasztható legalább egy r elemű lin. független vr, de az összes kiválasztható $r+1$ elemű vr. lin. összefüggő.
Jele: $A = a_1; a_2 \dots ; a_s$ $\quad r(A)$; $\varsigma(A)$; $r(a_1; a_2 \dots ; a_s)$

---

[1] vektortér

Egy vr rangja 0 is lehet. Egy vr rangja 0 ⇔, ha a vr csupa zérusvektort tartalmaz. Ha egy vr tartalmaz zérusvektortól különböző vektort ⇒ a rangja legalább egy.

Tétel: I., Ha egy vr rangja r ⇒ a vr. ∀ eleme egyértelműen írható fel a vr egy r elemű lin. független vr-e elemeinek a lin. kombinációjaként.

II., Ha egy vr-t a vektortérből további vektorokkal bővítjük ⇒ a vr. rangja nem csökken. Egy elem hozzávételével a vr. rangja legfeljebb eggyel nő.

III., Ha egy vr-t a vt-ből EGY olyan vektorral bővítjük, amelyik felírható a vr elemeinek lin. kombinációjaként ⇒ a vr rangja nem változik.

IV., Ha egy vr-t a vt-ből EGY olyan vektorral bővítjük, amelyik nem írható fel a vr elemeinek lin. kombinációjaként ⇒ a vr. rangja pontosan eggyel nő.

Mj.: I., A vektor rangjának definíciójából következik, hogyha egy vr. lin. független ⇒ a rangja megegyezik az elemeinek a számával.

II., Az előző tételből következik, hogy egy vr. részvektorrendszerének a rangja nem lehet nagyobb a vr. rangjánál.

Tétel: (VEKTORRENDSZEREK ALAPTÉTELE)

Legyen $A=(a_1;a_2;\dots;a_n)$; $B=(b_1;b_2;\dots;b_m)$ egy V T test fölötti vt vr-e.

Ha az A vr minden egyes eleme felírható a B vr elemeinek a lin kombinációjaként => az A vr rangja nem lehet nagyobb a B vr. rangjánál.

$$\rho(a_1; a_2; \dots; a_n) \le \rho(b_1; b_2; \dots; b_m)$$

BIZ: Vegyük hozzá a B vr-hez sorban egymás után az A vr elemeit. Mivel minden egyes lépésben olyan vektorral bővítettük a vr-t, amelyik felírható az előző lépésben keletkezett vr. elemeinek a lin. kombinációjaként, ezért az előző tétel értelmében:

$$\rho(b_1; b_2; \dots; b_m; a_1; a_2; \dots; a_n) = \rho(b_1; b_2; \dots; b_m)$$

De:

$$\rho(b_1; b_2; \dots; b_m, a_1; a_2; \dots; a_n) \ge \rho(a_1; a_2; \dots; a_n)$$

$$\to \rho(a_1; a_2; \dots; a_n) \le \rho(b_1; b_2; \dots; b_m)$$

Def.: Két vr-t ekvivalensnek nevezünk, ha az egyik vr minden egyes eleme felírható a másik vr elemeinek lin. kombinációjaként, és fordítva.

Ebből következik, hogy egymással ekvivalens vr-ek rangja egyenlő.

Az állítás megfordítása nem igaz. Ha két vr rangja egyenlő => abból nem következik, hogy a két vr. ekvivalens egymással.

Pl.: $A = \{(0; 1)\}$ $B = \{(1; 0)\}$

$\rho(A) = \rho(B) = 1.$

A két vr mégsem ekvivalens, mert egyik vektor sem írható fel a másik lin. kombinációjaként.

$\lambda(1; 0) \ne (0; 1)$

Tétel: V T test fölötti vt n dimenziós, ha található benne olyan n elemű lin. független vr, amely elemeinek lin. kombinációjaként a vt minden vektora felírható.

BIZ.: Legyen V T test fölötti vt, és legyen $A = \{a_1; a_2; \dots a_n\}$ ennek a vt-nek lineárisan független vr-e. A V minden egyes eleme előállítható ennek lin. kombinációjaként.
Tekintsük: $B = (b_1; b_2; \dots b_n; b_{n+1})$ a tér $n+1$ elemű vr-e.
A alaptétel értelmében $\rho(b_1; b_2 \dots b_n; b_{n+1}) \leq \rho(a_1; a_2; \dots a_n) = n$
Tehát $\forall$ $n+1$ elemű vr-re a vt-nek már összefüggő, de van benne n elemű vr, amelyik független, így a vt dimenziójának értelmében n dimenziós.

Def.: Egy vr. elemi átalakításain a következőket értjük:
1., A vr. valamelyik elemének $\lambda \neq 0$ ($\lambda \in T$) elemmel való szorzása
11., A vr. valamelyik eleme λ szorosának ($\lambda \in T$) egy másik eleméhez való hozzáadása.

Mj.: 1., A vr. elemi átalakításai hasonlítanak a mátrix elemi sor- és oszlopátalakításaihoz. Ott szerepelt két sor cseréje is. A vr-nél két vektor felcserélése nem elemi átalakítás, mert a vr-nél nem vagyunk tekintettel az elemek sorrendjére.
11., A vr-ek minden elemi átalakításához tartozik egy lin. inverz átalakítás, amely az eredeti vr-t állítja vissza. Ez az inverz átalakítás is elemi átalakítás.

Példa:

$$A = (a_1; a_2; \dots; a_n) \qquad \pi \in T \quad \pi \neq 0$$

$$A' = (\pi a_1; a_2; \dots; a_n)$$

$$A'' = (\tfrac{1}{\pi}\pi a_1; a_2; \dots; a_n) = (a_1; a_2; \dots; a_n) = A.$$

Tétel: A vr. rangja elemi átalakításokkal szemben invariáns (változatlan).