18. tétel

T test fölötti n dimenziós vektortér. Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függősége. Vektorrendszerek, vektorrendszerek lineáris függősége és függetlensége.

Def.: Elemek U összességét vektortérnek nevezzük, T test fölött, ha teljesülnek a köv. tulajdonságok:

I., U-ben az ⊕ értelmezett

II., U-ben az ⊕ kommutatív tulajdonságú

III., U-ben az ⊕ asszociatív tulajdonságú

IV., U-ben az ⊕ invertálható

azaz (U; ⊕) algebrai struktúra Abel-csoport (modulus), továbbá $\forall \lambda \in T$, $\forall a \in U$ esetén értelmezett a $\lambda \cdot a \in U$

U-ben értelmezett a T-beli skalárral, elemekkel való szorzás, és a szorzásra teljesülnek a köv. tulajdonságok:

V., $(a+b)\lambda = \lambda a + \lambda b$ $\quad \lambda \in T \quad a, b \in U$

VI., $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ $\quad (\lambda, \mu) \in T \quad a \in U$

VII., $(\lambda \cdot \mu)\, a = \lambda(\mu \cdot a) = \mu \cdot (\lambda \cdot a)$

VIII., $1 \cdot a = a$ $\quad 1 \in T, \; a \in U$

Mj.: I., $(\lambda + 0)a = \lambda a = \lambda a + 0a \Rightarrow 0 \cdot a = 0$

II., $(1+(-1))\, a = 1 \cdot a + (-1)\, a = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow -1a = -a$

Példa: - A T test fölötti $n \times m$ típusú mátrixok halmaza a mátrixok összeadására és T-beli elemmel, azaz skalárral való szorzásra nézve vektorteret alkot a T test fölött.

- A valós számok halmaza a racionális számok teste fölött az összeadásra és a szorzásra nézve vektorteret alkot.

Mj.: A vektortér elemeit vektoroknak nevezzük, a T test elemeit pedig skalároknak.

Kétféle jelölés alakult ki: $a \in V$

I; $\underline{a}$ $\lambda \in T$ (λ = k) $\lambda \underline{a} \in V$ ($k\underline{a} \in V$)

II; a $\lambda \in T$ $\lambda a \in V$

Def.: V T test fölötti vektortér véges számú vektorának összességét vektorrendszernek nevezzük, amelyben azonos vektorok is előfordulhatnak.

Két vektorrendszer egyenlő $\Leftrightarrow$, ha ugyanazokból a vektorokból áll, s és az egyes vektorok példányszámai is megegyeznek a két vektorrendszerben.

Def.: Azt mondjuk, hogy $\vec{b}$ vektor arányos $\vec{a}$ vektorral, ha $\exists$ olyan $\lambda \in T$, hogy $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ $(a, b \in V)$

A zérusvektor $\forall$ vektorral arányos, hiszen zérusvektor felírható: $0 = 0 \cdot \vec{a}$ $(0 \in T, a \in V)$. Nem zérusvektorra az arányosság szimmetrikus. Ha $b \neq 0 \Rightarrow b = \lambda \cdot a \Rightarrow \lambda \neq 0$ és ekkor az $a = \frac{1}{\lambda} b \Rightarrow$ arányosság szimmetrikus.

Def.: Azt mondjuk, hogy V vektortér $\bar{a}$ vektora az $a_1, a_2 \dots a_n$ vektorok lineáris kombinációja, ha $\exists$ olyan $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \in T$, amelyre teljesül a következő egyenlőség:

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n .$$

(→a vektor)

Ilyenkor azt is mondjuk, hogy az $\bar{a}$ az adott $a_1, a_2 \dots a_n$ vektoroktól lineárisan függ.

A zérusvektor ∀ vektortól lineárisan függ.

$0 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 0 \cdot a_n \quad (\lambda_n = 0)$

A zérusvektornak ezt az előállítását triviális lineáris kombinációnak (v. triviális előállításának) nevezzük. Ha a vektor nem írható fel az $a_1, a_2 \dots a_n$ lin kombinációjaként ⇒ azt mondjuk, hogy az $\bar{a}$ az adott $a_1, a_2 \dots a_n$ lin. független.

Def.: Egy vr[1]-t lineárisan összefüggőnek mondunk, ha van a vr-nek egy eleme, amely felírható a vr többi elemének lin kombinációjaként. Ellenkező esetben a vr. lin. független.

Def.: Egy vr.-t lineárisan összefüggőnek mondunk, ha a zérusvektor nem csupán triviálisan állítható elő az adott vr elemeinek a lin. kombinációjaként, azaz $a_1, a_2 \dots a_n$.

A vr lin összefüggő, ha ∃ olyan $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, amelynek nem mindegyike 0, és teljesül, hogy:

$$0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

A zérusvektort csupán triviális módon tudjuk előállítani, a vr. elemeinek a lin kombinációjaként ⇒ a vr. lin. független.

Tétel: Az utolsó két definíció ekvivalens, azaz egyenértékű egymással.

[1] vr: vektorrendszer

BIZ.: Legyen az $a_1, a_2 \dots a_n$ vr az utolsó előtti def. értelmében lineárisan összefüggő. Ez azt jelenti, hogy J olyan eleme a vrnek, ami felírható a többi elem lin. kombinációjaként.

Legyen ez az $a_n = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1} \quad / - a_n$

$$0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1} - a_n$$

$\lambda_n = -1$ ebben, ezért nem triviális a lin kombináció $\Rightarrow$ a vr összefügg az utolsó def. értelmében.

II., Legyen $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ legyen $\lambda_n \neq 0$. Fejezzük ki az a_n vektort.

$$a_n = \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_n}\right) a_1 + \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_n}\right) a_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) a_{n-1}$$

a_n-et tehát felírtuk a vr többi elemének lin. kombinációjaként, azaz összefüggő az utolsó előtti definíció szerint.

Tétel: 1 vektorból álló vr független $\Leftrightarrow$, ha a vektor nem zérusvektor.

BIZ.: Legyen $\bar{a}$ nem zérusvektor.

$0 = \lambda \cdot a$ formában felírt, csak akkor teljesül, ha $\lambda = 0$. Ez azt jelenti, hogy zérusvektort csak triviálisan tudjuk előállítani $\Rightarrow$ hogy csak ez az egy eleme van.

$\{a_n\}$, $a_n \neq 0$

Tétel: V T test fölötti vektortér $\forall$ vektora legfeljebb egyféleképpen állítható elő, egy lin. független vr. elemeinek a lin. kombinációjaként.

BIZ.: Legyen $a_1, a_2 \dots a_n$ lin független vr. Legyen továbbá b tetszőleges eleme a U T test fölötti eleme. Tfh. 2féleképpen állítható elő az adott vr. lin kombinációjaként.

$$-\begin{cases} b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n & (\lambda \in T) \\ b = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_n a_n \end{cases}$$

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1) a_1 + (\lambda_2 - \mu_2) a_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) a_n$$

Az adott vr. lin független, ezért kell, hogy mindegyik szorzótényező 0 legyen.

$0 = \lambda_1 - \mu_1 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1$; $\lambda_2 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \mu_2$; … $\lambda_n - \mu_n = 0 \Rightarrow \lambda_n = \mu_n$

tehát a 2. lin kombináció nem különbözik egymástól. Tehát a b felírható $a_1, a_2 \dots a_n$ lin kombinációjaként $\Rightarrow$ csak egyféleképpen állítható elő.

Tétel: Ha egy vr tartalmaz zérusvektort, vagy tartalmaz két arányos vektort $\Rightarrow$ a vektorrendszer lin összefüggő.

BIZ: 1, $a_1; a_2 \dots; 0; \dots a_n$ U T test fölötti vektortérnek egy vektorrendszere.

$$0 = 0a_1 + 0a_2 + \dots + \underset{\substack{\Downarrow \\ \lambda_i = 1}}{1 \cdot 0} + \dots + 0a_n$$

tehát a zérusvektort nem csak triviálisan tudjuk előállítani a lin. kombinációt $\Rightarrow$ a vr az utolsó def. értelmében összefüggő.

2, Legyen $a_1; a_2; \dots; a_i; \dots; a_j; \dots; a_n$ vr-e a U vektortérnek, ahol $a_j = \lambda a_i$ $(\lambda \in T)$ azaz tartalmaz két arányos vektort.

$0 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + (-\lambda) a_i + \ldots + a_j + \ldots + 0 a_n$

Ezen két tag kivételével valamennyi tag együtthatója 0. Ha $-\lambda a_i + a_j = 0$, mert ha ezt rendezzük $\Rightarrow a_j = \lambda a_i$. Ez nem triviális kombinációja a zérusvektornak, tehát a vr. az utolsó definíció értelmében összefüggő.

Tétel: Ha az $a_1, a_2; \ldots; a_r; \ldots a_n$ lin független vr $\Rightarrow$ az $a_1, a_2 \ldots a_r$ vr is lin független. (Egy lin független vr. ∀ részvektorrendszere is lin független).

BIZ.: Tekintsük a köv. lin. kombinációt!

$$0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r a_r \quad (\lambda_i \in T)$$

Tekintsük:

$$0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r a_r + 0 a_{r+1} + \ldots + 0 a_n \quad (\lambda_i \in T)$$

Mivel $a_1, a_2, \ldots; a_r; \ldots a_n$ lin. független, ezért

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_r = 0$.

$0 = 0 a_1 + 0 a_2 + 0 a_3 + \ldots + 0 a_r$

Tehát csak triviálisan tudjuk előállítani a zérusvektort $\Rightarrow$ a vr. lin. független.

Tétel: Ha az $a_1; a_2; \ldots a_r$ lin összefüggő vr $\Rightarrow a_1; a_2 \ldots a_r; a_{r+1}; \ldots a_n$ vr. is összefüggő.

BIZ.: Indirekt.

Tfh: $a_1; a_2 \ldots; a_r; a_{r+1}; \ldots; a_n$ vr lin független $\Rightarrow$ az előző tétel értelmében az $a_1; a_2; \ldots; a_r$ vr is lin független $\Rightarrow$ ez pedig ellentmondás, tehát valóban, ha $a_1; a_2; \ldots a_r$ összefüggő vr $\Rightarrow$ az $a_1; a_2; \ldots a_r; a_{r+1} \ldots; a_n$ is lin összefüggő.

Tétel: Ha egy lin. független vr-hez a vektortérből egy vektort hozzávéve a vr lin összefüggővé válik $\Rightarrow$ a hozzávett vektor felírható az eredeti vr. elemeinek a lin. kombinációjaként.

BIZ.: Legyen $a_1; a_2 \dots; a_n$ vr lin független

legyen továbbá $b \in V$

Vegyük hozzá ezt a b-t a rendszerhez, $a_1; a_2; \dots; a_n; b$ már összefüggő. Azt állítjuk, hogy a b felírható a vr. lin kombinációjaként.

$$b = \lambda_1' a_1 + \lambda_2' a_2 + \dots + \lambda_n' a_n \qquad (\lambda_i' \in T)$$

Képezzük a köv. lin. kombinációt!

$$0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda b \qquad (\lambda \neq 0;\ \lambda_i \in T;\ \lambda \in T)$$

Fejezzük ki a b vektort ebből az egyenlőségből!

$$b = \underbrace{\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)}_{\lambda_1'} a_1 + \underbrace{\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)}_{\lambda_2'} a_2 + \dots + \underbrace{\left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)}_{\lambda_n'} a_n$$