17. tétel

Lineáris egyenletrendszerekről. A lineáris egyenletrendszer megoldhatósága, a megoldások száma. Gauss módszere. A homogén egyenletrendszer. Cramer-szabály.

Def.:

$$(1.)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert a T test fölötti lineáris egyenletrendszernek nevezzük, ahol m, n 0-tól különböző természetes számok, $a_{ij} \in T$ $(i = 1,2\dots m,\ j = 1,2\dots n)$ nem mindegyike 0. Továbbá $c_i \in T$ $(i = 1,2\dots m)$ x_j $(j = 1,2\dots n)$ ismeretlenek.

(lineáris: az ismeretlenek az első hatványon szerepelnek)

Def.: Az $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ rendezett elem n-est az (1.) lineáris egyenletrendszer megoldásának nevezzük, ha $\forall\, i$-re teljesül, hogy

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\alpha_t = c_i \qquad (\alpha_i \in T \quad i = 1,2\dots n)$$

Azaz $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ a lineáris egyenletrendszer $\forall$ egyenletét kielégíti.

Def.: Egy lin. egyenletrendszert megoldhatónak nevezünk, ha van legalább egy megoldása. Ellenkező esetben az egyenletr. megoldhatatlan v. ellentmondásos.

Def.: Ha (1.) lin. egyenletr. jobb oldalán szereplő konstansok mindegyike 0, akkor a lin. egyenletr.-t homogénnek mondjuk. Ellenkező esetben inhomogén.

Egy homogén lin. egyenletrendszer mindig megoldható $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.
$(0,0,0\dots 0)$ rendezett elem n-es megoldása az egyenletrendszernek.
Ezt a megoldást a homogén lin. egyenletrendszer triviális megoldásnak nevezzük.

Def.: Az (1.) egyenletrendszer együtthatóiból képezett

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ mátrixot az egyenletrendszer alapmátrixának

vagy röviden az egyenletrendszer mátrixának nevezzük.

A $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ oszlopvektort a konstansok oszlopvektorának, az

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ oszlopvektort az ismeretlenek oszlopvektorának hívjuk.

Ezek felhasználásával az (1.) er.[1] röviden $A \cdot x = c$ mátrix-egyenlet formájában írható fel.

Def.: Két lin. er-t ekvivalensnek nevezünk, ha a megoldáshalmazuk azonos. Azaz: egyiknek minden megoldása, megoldása a másiknak és fordítva.

Def.: Ha egy lin er-en olyan átalakításokat hajtunk végre, amely után kapott lineáris er az adott lin er-rel ekvivalens, akkor ezeket az átalakításokat ekvivalens átalakításoknak nevezzük.

Egy lin er. ekvivalens átalakításai a következők:

1., A lin. er. $\forall$ egyenletének $\lambda \neq 0$ $(\lambda \in T)$-vel való szorzása

[1] er: egyenletrendszer

II. Az er. két egyenletének felcserélése

III. Az er. K egyenlete λ ($\lambda \in T$) szorosának egy másik egyenlethez való hozzáadása.

IV. Az er-ben az azonos ismeretleneket tartalmazó tagok egyidejű felcserélése.

V. Az er-ből a $0=0$ alakú egyenletek elhagyása.

Gauss-elimináció:

Tekintsük

(1.)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

T test fölötti lin er-t. (a_{ij} nem mindegyike 0.)

- ekvivalens átalakításokkal mindig elérhető, hogy (1.)-es er-ben $a_{11} \neq 0$.
- az első egyenletét az er-nek szorozzuk meg $\frac{1}{a_{11}}$-el.

Ezzel az első ismeretlen együtthatója 1 lesz.

$$x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = b_1'$$

Ennek az egyenletnek az a_{21}-szeresét vonjuk ki a 2. egyenletből, a_{31}-szeresét vonjuk ki a 3. egyenletből ... stb.

a_{m1}-szeresét pedig az utolsó egyenletből. Ezáltal a következő (II.)-vel jelölt er-rel ekvivalens er-hez jutunk.

$$\text{(II.)} \quad \begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = b_1' \\ \quad\; b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = b_2' \\ \quad\; b_{32}x_2 + \dots + b_{3n}x_n = b_3' \\ \quad\; \vdots \\ \quad\; b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n = b_m' \end{cases}$$

Ha a (II.) er. megoldható, akkor az (I.)-es is.

Tekintsük a

$$(\text{III.})\quad \begin{cases} b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n = b_2' \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \dots + b_{3n}x_n = b_3' \\ \vdots \\ b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + \dots + b_{mn}x_n = b_m' \end{cases}$$

Ha a (III.) megoldható, és ennek $x_2 = \alpha_2,\ x_3 = \alpha_3 \dots\ x_n = \alpha_n$ megoldása és ehhez hozzávéve $\alpha_1 = b_1' - (b_{12}\alpha_2 + b_{13}\alpha_3 + \dots + b_{1n}\alpha_n)$ értéket, akkor ez megoldása lesz a (II)-es és így az (I.)-es er-nek is.

Az (I.)-es er megoldhatóságát visszavezettük a (III.)-as er megoldhatóságának vizsgálatára, ez meg eggyel kevesebb egyenletet tartalmaz. A (III.)-as er-rel az előző eljárást újból megismételjük ... stb. Az eljárás akkor ér véget, ha vagy elfogytak az egyenletek vagy a lin. er-k további egyenletének bal oldalán valamennyi együttható 0.

Így végül az (I.)-vel ekvivalens er-hez jutunk.

$$(\text{IV.})\quad \begin{aligned} x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 + \dots + d_{1n}x_n &= b_1^* \\ x_2 + d_{23}x_3 + \dots + d_{2n}x_n &= b_2^* \\ x_3 + \dots + d_{3n}x_n &= b_3^* \\ &\vdots \\ x_r + d_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{rn}x_n &= b_n^* \\ 0 &= b_{r+1}^* \\ 0 &= b_{r+2}^* \\ &\vdots \\ 0 &= b_m^* \end{aligned}$$

$r \leq \min(m, n)$

A (IV.) - es er-t az (1.) er-hez tartozó egyik trapéz alakú lin er-ének nevezzük.

A (IV)-es er-ről leolvasható a következő tétel:

Tétel: Az (1.) lin. er megoldható ⟺ ha a hozzá tartozó egyik trapéz alakú lin. er-ének azon egyenleteiben, ahol a bal oldalak 0-val egyenlők, a jobboldali konstansok is 0-val egyenlőek.

A (IV.)-es er-ről nem csak a megoldhatóság olvasható le, hanem segítségével meghatározhatjuk a megoldások számát, és előállíthatjuk az (1.) összes megoldását.

Rendezzük a (IV)-es er-t a köv. szerint:

$$
(\mathrm{V.})\quad
\begin{aligned}
x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 + \dots d_{1r}x_r &= b_1^* - (d_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{1n}x_n)\\
x_2 + d_{13}x_3 + \dots d_{2r}x_r &= b_2^* - (d_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{2n}x_n)\\
&\vdots\\
x_r &= b_r^* - (d_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{rn}x_n)
\end{aligned}
$$

A többi egyenletet hagyjuk el, ha az er megoldható. ∀ értéket helyettesítjük is az $x_{r+1}, x_{r+2} \dots x_n$ ismeretlenek helyére a T testből az (V.) utolsó egyenletéből x_r az előző egyenletből $x_r \dots$ a 2. egyenletből x_2, az elsőből x_1 meghatározó.

Érvényes a következő tétel:

Tétel: Ha az (1.) lin er megoldható, ⇒ a megoldások az együtthatókat tartalmazó testből kerülnek ki, a lin er-nek egy megoldása van (egy dim n-es), ha a hozzá tartozó egyik trapéz alakú er-ében

1., $r = n$ és ha

2., $n > r$ ⇒ $n-r$ szabadon választható értéktől függően végtelen sok megoldása van az er-nek.

Példa: Megoldható-e a lin. er, és ha igen, oldjuk meg Gauss-módszerrel!

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + 3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$$
$$-x_2 + 4x_3 = 3$$
$$+4x_3 = 4$$
$$x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$$
$$x_2 - 4x_3 = -3$$
$$x_3 = 1$$
$$4x_3 = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_2 - 4x_3 = -3$$
$$x_3 = 1$$

$0 \neq 1$ Megoldhatatlan!

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 + x_2 + 5x_3 = -7$$
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14$$

Megcseréljük az 1. egyenletet a 2. egyenlettel.

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 + 5x_3 = -7$$
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14$$

Az 1. e.-t 2x-it kivonjuk a 2. és 4. sorból, és az 1. sort kivonjuk a 3. sorból

---

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3&=5 \\ -5x_2-x_3&=-8 \\ -2x_2+4x_3&=-12 \\ -3x_2-5x_3&=4 \end{aligned}$$

A 3. sort $:(-2)$-vel és felhozzuk a 2. sorba.
A 2. sort $\cdot(-1)$-vel
A 4. sort $\cdot(-1)$-vel

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3&=5 \\ x_2-2x_3&=6 \\ 5x_2+x_3&=8 \\ 3x_2+5x_3&=-4 \end{aligned}$$

A 2. sort $\cdot 5$-vel és kivonjuk a 3. sorból
A 2. sort $\cdot 3$-val és kivonjuk a 4. sorból

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3&=5 \\ x_2-2x_3&=6 \\ 11x_3&=-22 \\ 11x_3&=-22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3&=5 \\ x_2-2x_3&=6 \\ x_3&=-2 \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldható

$$0=0$$

$r=n \quad (r=3)$

Megoldás:

$x_3=-2$

$x_2=6+2x_3 \rightarrow x_2=2$

$x_1=5-3x_2-x_3 \rightarrow x_1=1$

$(1;2;-2)$ rendezett elemhármas a megoldása az er-nek.

A Gauss-féle módszer homogén lin. er-re is alkalmazható

$$(1.)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

Ez mindig megoldható, mert $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ is megoldása.
(Ez a triviális megoldás.)

Ha $x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2 \dots x_n=\alpha_n \quad (c\in T)$

$x_1=c\cdot\alpha_1,\ x_2=c\cdot\alpha_2 \dots x_n=c\cdot\alpha_n$

Érvényes a köv. tétel:

Tétel: Az (1.)-es homogén lin. er-nek csupán egy megoldása van (a triviális megoldása) $\Leftrightarrow$ ha a hozzá tartozó tartozó egyik trapéz alakú lin. er-ében $r=n$.

Akkor és csak akkor van az (1.) homogén er-nek triviálistól különböző megoldása, ha $n<r$.

Ha egy homogén lin. er. kevesebb egyenletet tartalmaz, mint ismeretlent, $\Rightarrow$ mindig $\exists$ triviálistól különböző megoldása. (tehát végtelen sok megoldása van.)

Cramer-szabály:

Tekintsük a következő lineáris er-t:

$$(1.)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Lineáris egyenletrendszer mátrixának nevezzük:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az ismeretlenek oszlopvektora:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A szabad tagok oszlopvektora:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Az (1.) lin. algebrai rendszer determinánsa:

$$|A| = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Def.: Az (1.) egyenletrendszert szabályos lineáris er-nek nevezzük, ha n egyenletet tartalmaz és az ismeretlen és az er. determinánsa nem 0.

Tétel: Egy szabályos lin. er. (1.) mindig megoldható.

Cramer-tétele:

1., egy megoldása létezik

II., a megoldás egy rendezett elem n-es

III., a megoldások $x_k = \frac{D_k}{D}$ $(k = 1, 2 \dots n)$, ahol D_k jelenti az er. det-át, amely abban különbözik az er. det-ától, hogy a k-dik oszlop helyett benne a konstans oszlop szerepel.

BIZ.: 1., először azt fogjuk belátni, hogy ha az (1.) er. a feltételek mellett megoldható ⇒ megoldásai a tételben szereplő alakjai

$D \neq 0$ felírható $Ax = b$ alakban is

Mivel az er. szabályos, tehát $|A| = D \neq 0$ ezért

$\exists$ inverze A-nak.

Szorozzuk meg a mátrix er-t balról az A^{-1}-gyel.

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

$$(A^{-1} \cdot A)\, x = A^{-1} b \quad \text{asszociativitás miatt}$$

$$E\, x = A^{-1} b$$

A mátrix inverze

$$A = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Végezzük el a bal oldalon a szorzást!

$$\frac{1}{D}\begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{1n} \\ b_2 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{2n} \\ \vdots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n \cdot A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Mátrixok egyenlőségét figyelembe véve:

$$x_1 = \frac{1}{D}\left(b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + \dots + b_n \cdot A_{1n}\right) = \frac{1}{D} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{D_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D}$$

Hasonlóképpen a második sor megegyezik x_2-vel.

$$x_2 = \frac{1}{D}\left(b_1 \cdot A_{12} + b_2 \cdot A_{22} + \dots + b_n A_{2n}\right) = \frac{1}{D} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

D módosított det-a.

$$x_2 = \frac{D_2}{D}$$

$\vdots$

$$x_k = \frac{D_k}{D}$$ A megoldások egyenlők

$\vdots$

$$x_n = \frac{D_n}{D}$$ $x_k = \frac{D_k}{D}$ alakúak

II., Belátjuk azt, hogy a megoldások valóban megoldások, azaz a lin. er. egyenletek kielégíti.

Tekintsük az er. i-dik egyenletét $(1 \le i \le n)$:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n = b_i$$

$$a_{i1} \frac{D_1}{D} + a_{i2} \frac{D_2}{D} + \ldots + a_{in} \frac{D_n}{D} =$$

$$= \frac{1}{D} \Big[a_{i1} (b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + \ldots + b_n \cdot A_{1n}) + a_{i2} (b_1 \cdot A_{12} + b \cdot A_{22} + \ldots$$

$$\ldots + b_n \cdot A_{2n}) + \ldots + a_{in} (b_1 \cdot A_{1n} + b_2 \cdot A_{2n} + \ldots + b_n \cdot A_{nn}) \Big]$$

Emeljük ki a b_i-ket ahány tagból lehet!

$$\frac{1}{D} \Big[b_1 (A_{11} \cdot a_{i1} + a_{i2} \cdot A_{12} + \ldots + a_{in} \cdot A_{1n}) + b_2 (a_{i1} \cdot A_{21} + a_{i2} \cdot A_{22} + \ldots +$$

$$+ a_{in} \cdot A_{2n}) + \ldots + b_i (a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}) + \ldots$$

$$+ b_n (a_{i1} \cdot A_{n1} + a_{i2} \cdot A_{n2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{nn}) = \frac{1}{\cancel{D}} \cdot b_i \cdot \cancel{D} = b_i$$

Tehát a megoldások kielégítik az i-dik egyenletet, mivel i-t tetszőlegesen választottuk, $\forall$ egyenletet kielégítik.

Példa: Szabályos -e a löv. er.? Ha igen, oldjuk meg a Cramer-szabállyal!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0 \quad \text{szabályos}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 29 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-27} = \underline{\underline{3}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 31 & 4 \\ 5 & 29 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{-27} = \underline{\underline{4}}$$

Megoldások: $(3; 4; 5)$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-27} = \underline{\underline{5}}$$

Ha az er ugyanannyi egyenletet tartalmaz, mint ismeretlent és az er. homogén $\Rightarrow$ az er-nek $\Leftrightarrow$ van egy megoldása (a triviális megoldás), ha az er det-a $\neq 0$.

Ha a lin er. ugyanannyi egyenletet tartalmaz, mint ismeretlent és az er homogén $\Rightarrow$ az er-nek $\Leftrightarrow$ van triviálistól különböző megoldása, ha az er. determinánsa 0. Ez utóbbi esetben a Cramer szabály nem alkalmazható, a megoldásokat Gauss-módszerével állítjuk elő.