22. tétel

Mátrixok rangszámtétele. Lineáris egyenletrendszerek és mátrixok. Lineáris egyenletrendszerek és vektorok.

Terjedelme:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ T test fölötti mátrixot.

Minden sora terjedhető 1 sorvektornak (n komponensű), de a mátrix minden oszlopa terjedhető 1 oszlopvektornak.

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2} \dots a_{in})$$

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Tétel: Ha egy mátrix rangja „r" ⇒ a mátrixból kiválasztható r számú lin. független sorvektor v oszlopvektor, r-nél több azonban nem. Ezt a tételt nevezzük a MÁTRIXOK RANGSZÁMTÉTELÉNEK.

Következmény: Egy mátrix maximálisan lineárisan független sorvektorainak a száma egyenlő a maximálisan lin. független oszlopvektorainak a számával, és ez egyenlő a mátrix rangjával.

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}\right\} (1.)$$

Az $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ az (1.) lin. egyenletrendszer mátrixának nevezzük.

$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ mátrixot az (1.) lin egyenletrendszer kibővített mátrixának nevezzük.

Tétel: (Kronecker - Capelli tétel)

Az (1.) lin. egyenletrendszer megoldható $\Leftrightarrow$, ha az egyenletrendszer mátrixának a rangja egyenlő az egyenletrendszer kibővített mátrixának rangjával. $r(A) = r(\bar{A})$

BIZ.: 1., Tfh. az (1.) lin e.r.[1] megoldható. Bebizonyítjuk, hogy $r(A) = r(\bar{A})$

Legyen (1.) megoldása $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2 \dots x_n = \alpha_n$ $(\alpha_i \in T)$

Mivel megoldások:
$$\begin{aligned}
a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= b_1\\
a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n &= b_m
\end{aligned}$$

Így felírható:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}\alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}\alpha_2 + \dots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\alpha_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

1: er: egyenletrendszer

Ebből látható, hogy a konstans oszlopvektor felírható az A mátrix oszlopvektorainak a lin. kombinációjaként. Ismeretes, hogy egy vektorrendszer rangja nem változik, ha a vr-t egy olyan vektorral bővítjük, amelyik felírható a vr elemeinek a lineáris kombinációjaként. Ezért a rangszámtétel értelmében:

$$r(A) = r(\bar{A})$$

2., $r(A) = r(\bar{A}) = r$

Megmutatjuk, hogy ekkor (1.) megoldható.

Mivel $r(A) = r$, ezért az A mátrix maximálisan lin. független sorvektorainak és oszlopvektorainak a száma r.

Ez az r számú max. lin. független sor- és oszlopvektorrendszer max. lin. független vr. lesz az $\bar{A}$ mátrixban is. Ezért az $\bar{A}$ mátrix utolsó oszlopa felírható az r számú lin. független oszloprendszer, következésképpen az A mátrix oszlopainak lin. kombinációjaként.

Azaz:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \beta_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \beta_1 \;;\; x_2 = \beta_2, \dots \; x_n = \beta_n$$

Ha az (1.) lin. er. megoldható $\Rightarrow$ a megoldásokat a lin er. megoldásai közül bármelyikkel megtehetjük.

Tekintsük:

$$(1.)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} ; \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \dots \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ezek felhasználásával az (1.) lin. er. a következő vektor-egyenlet formájában írható fel.

$$(11.)\quad v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_nx_n = w$$

Tétel: $v_1, v_2 \dots v_n$ vektorok lin. kombináció az n komponensű T test fölötti V_m m dimenziós vektortérnek egy alterét alkotják.

BIZ.: V'_m a $v_1, v_2, \dots v_n$ lin. kombinációjának a halmazát jelöli. $V'_m \subseteq V_m$

Megmutatjuk, hogy V'_m-ben is teljesülnek az altér-kritériumok.

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \in V'_m \quad (\alpha_i \in T)$

$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n \in V'_m \quad (\beta_i \in T)$

a., Adjuk össze a két sort!

$v + u = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)v_n \in V'_m$

V'_m zárt az összeadásra nézve!

b., $\lambda \cdot v = (\lambda\alpha_1)v_1 + (\lambda\alpha_2)v_2 + \dots + (\lambda\alpha_n)v_n \; V'_m \quad \lambda \in T$

V'_m zárt a skalárral való szorzásra nézve is.

U'_m-ben teljesülnek az altérkritériumok, ezért valóban U'_m altere U_m-nek.

Tétel: A (II.) vektoregyenlet és így az (I.) lin er. megoldható $\Leftrightarrow$ ha a w vektor benne van a $u'_1, u'_2 \dots u'_n$ vektorok lin kombinációinak az alterében, azaz $w \in U'_m$.

BIZ.: I., Tfh.: a (II.) vektoregyenlet megoldható. Legyen $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2 \dots, x_n = \alpha_n$ megoldások, ahol $\alpha_i \in T$.

Teljesül, hogy $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = w \Rightarrow w \in U'_m$ altérben.

II., Tfh.: $w \in U'_m \Rightarrow w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n \Rightarrow$ $(\beta_i \in T)$

$$x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2 \dots ,\ x_n = \beta_n$$

A (II.) és így az (I.) lin. er. megoldásai.

A vektorrendszer rangjának segítségével az előző tétel a következőképpen is megfogalmazható.

A (II.) vektoregyenlet, és így az (I.) vr. megoldható $\Leftrightarrow$, ha a $u_1, u_2 \dots u_n$ vr. rangja megegyezik a $u_1, u_2 \dots u_n = w$ vr. rangjával.