21. tétel

Alterek, alterek metszete, összege, direkt összege, dimenziója

Def.: V T test fölötti vektortémer. V' nem üres részhalmazát a V vektortér alterének nevezzük, ha V' a V-ben értelmezett műveletekre (összeadás és skalárral való szorzás) nézve ⊕ is vektorteret alkot.

Megjegyzés: I., Minden vektortémer önmaga, továbbá a $V' = \{0\}$ (zéró vektortér) altere. Ezeket az altereket a V vektortér TRIVIÁLIS altereinek hívjuk.

II., Egy vektortér önmagától különböző altereit a vektortér VALÓDI altereinek nevezzük.

Tétel: V T test fölötti vektortér ∀ V' altere tartalmazza a V zérusvektorát, továbbá ∀ vektorral annak additív inverzét is, V' zárt a kivonásra nézve.

BIZ.: Legyen V T test fölötti vektortér V' altere.

I., Mivel V' altér, ezért $a \in V'$ esetén $\lambda a \in V'$ $(\lambda \in T)$

$\underset{\sim}{0} = 0 \cdot a \in V'$ $(0 \in T)$

II., $a \in V' \Rightarrow (-1)a \in V'$ $(-1 \in T)$

$-a \in V'$

III., $a - b = a + (-b) \in V'$

$a, b \in V$

A kivonás mindig elvégezhető az altérben.

Tétel: (Altérkritérium)

U T test fölötti vektortér U' nem üres részhalmaza $\Leftrightarrow$ altere U-nak, ha teljesül a következő két feltétel:

I. Minden a-ra és minden b-re $(a, b \in U')$; $a+b \in U'$

II. Minden a-ra $(a \in U')$; $\lambda a \in U'$ $(\lambda \in T)$

BIZ.: I., Ha U' altere U-nak, $\Rightarrow$ az 1.-es és a 2.-es pont nyilvánvalóan teljesül.

II. Legyen U T test fölötti vektortérnek U' nem üres részhalmaza $\overset{1.}{\Rightarrow}$ U' zárt az összeadásra nézve, továbbá $\overset{2.}{\Rightarrow}$ U' zárt a skalárral való szorzásra nézve. Az $\oplus$ és a skalárral való $\odot$ tulajdonságai automatikusan teljesülnek U'-ben.

Példák:

I. Amint az ismeretes a térbeli vektorok U_3 halmaza a $\mathbb{R}$ teste fölött vektortér. Legyen α U_3-nak egy síkja egy síkja. Ebbe az α síkba eső vektorok összege szintén vektort alkot $\mathbb{R}$ fölött. És utóbbi vektortér altere U_3-nak.

II. Tekintsük U_3 $\mathbb{R}$ fölötti vektorterét, és legyen e egyenes a tér egy egyenes. U_3-nak ezen egyenessel párhuzamos vektorainak összessége szintén vektorteret alkot $\mathbb{R}$ fölött. És a tér is altere U_3-nak.

III. Legyen T test $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ rendezett elem n-esek halmazát $(\in U_n)$, $(a_i \in T)$. U_n vektorteret alkot T test fölött.
Tekintsük a köv. halmazt: $(0, a_2, a_3 \ldots a_n) \in U'_n \subset U_n$; $(U'_n \neq 0)$ $(a_i, 0 \in T)$ $(i = 2, 3 \ldots n)$. U'_n ugyancsak vteret alkot T fölött. És a vektortér altere U_n-nek.

Megj.: Az altér dimenziója nem lehet nagyobb a vektortér dimenziójánál.

Tétel: Az altér dimenziója nem lehet nagyobb a vektortér dimenziójánál.

BIZ.: I., A „uj" szerint és a részhalmazból nem lehet több elemű lin. független vr-t kiválasztani, mint az egészből, ezért az altér dimenziója nem lehet nagyobb a vektortér dimenziójánál.

II., Ha az altér dimenziója megegyezik a vektortér dimenziójával, és ez „n", akkor az eredeti vektortér minden vektora egyértelműen írható fel az altér egy n elemű lin. független vektorrendszere elemeinek lin. kombinációként, azaz a vektortér minden egyes eleme eleme az altérnek is, tehát az altér egyenlő magával a vektortérrel.

Def.: Legyen U T test fölötti vektortérnek U_1 és U_2 altere. A két altér közös részén v. metszetén értjük a $U_1 \cap U_2$ halmazt, ellátva U beli műveletekkel. ($\oplus$ és a skalárral való szorzás)

Tétel: Két altér metszete is altér.

BIZ.: I., Legyen U_1, U_2 altere U-nak. Biz. be, hogy $U_1 \cap U_2$ is altér. $U_1 \cap U_2 \neq 0$, mert U_1 és U_2 is tartalmazza a zérust, így nem lehet üreshalmaz a metszet.

Legyen $a, b \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow a, b \in U_1$; $a, b \in U_2$.

Kihasználjuk, h. U_1, U_2 altér $\Rightarrow a+b \in U_1$ és $a+b \in U_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a+b \in U_1 \cap U_2$. Teljesül az első kritérium.

II. Legyen $a \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow a \in U_1$ és $a \in U_2 \xrightarrow{U_1, U_2 \text{ altér}} \lambda a \in U_1$ és $\lambda a \in U_2$, ahol $\lambda \in T \Rightarrow \lambda a \in U_1 \cap U_2$ $(\lambda \in T)$

Teljesül a második kritérium.

Tehát $U_1 \cap U_2$ altere U-nak.

Def.: Legyen U T test fölötti vektortér U_1 és U_2 altere. A két altér összegén értjük és U_1+U_2-vel jelöljük az $a+b$ alakú elemek halmazát, ahol $a \in U_1$, $b \in U_2$

Tétel: Két altér összege is altér.

BIZ.: I, Legyen a_1+b_1 ; $a_2+b_2 \in U_1+U_2 \Rightarrow a_1, a_2 \in U_1$ és $b_1, b_2 \in U_2$

$\xrightarrow{U_1, U_2 \text{ altér}} a_1+a_2 \in U_1,\ b_1+b_2 \in U_2 \xrightarrow{\text{def. sz.}} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \in U_1+U_2 \Rightarrow (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \in U_1+U_2$.

Tehát: U_1+U_2 zárt az $(+)$-ra nézve $\Rightarrow$ teljesül az első alkritérium.

II, $a+b \in U_1+U_2 \Rightarrow a \in U_1$ és $b \in U_2 \Rightarrow \lambda a \in U_1$ és $\lambda b \in U_2$ $(\lambda \in T)$

$\xrightarrow{\text{def sz.}} \lambda a + \lambda b \in U_1+U_2 = \lambda(a+b) \in U_1+U_2$

Tehát: U_1+U_2 zárt a skalárral való szorzásra.

Teljesül a 2. alkritérium, azaz U_1+U_2 altere U-nak.

Megj.: 1. A két utóbbi tétel felhasználásával egy vektortér altereiből újabb altér képezhető.

II, Alterek metszete és összege kiterjeszthető véges, vagy akár végtelen sok altérre is.

21/4

Tétel: (Alterek összegének dimenziótétele)

Véges dimenziós vektortérben két altér összegének a dimenziója egyenlő az egyik altér dimenziója plusz a másik altér dimenziója, kivonva ebből a két altér metszetének a dimenzióját. $\dim(U_1+U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$

BIZ.: Legyen U T test fölötti vektortér és $\dim = n$. Legyen U_1 és U_2 altere U-nak. $\Rightarrow$, hogy $U_1 \cap U_2$ altere U-nak. Legyen $\dim(U_1 \cap U_2) = r$, $\dim U_1 = r_1$, $\dim U_2 = r_2$. Azt kell belátni, hogy: $\dim(U_1 + U_2) = (r_1 + r_2) - r$.

Legyen $(a_1, a_2 \dots a_r)$ vr bázisa $U_1 \cap U_2$-nek. Legyen $(a_1, a_2 \dots a_r, b_{r+1}, b_{r+2} \dots b_{r_1})$ bázisa U_1-nek, $(a_1, a_2 \dots a_r, c_{r+1}, c_{r+2} \dots c_{r_2})$ bázisa U_2-nek.

Tekintsük a köv. vektorrendszert!

$(a_1, a_2 \dots a_r, b_{r+1}, b_{r+2} \dots b_{r_1} \dots c_{r+1} \dots c_{r_2})$.

Ez a vr gr-e (U_1+U_2)-nek, mert U_1+U_2 minden eleme elő-állítható ezen vektorok lin. kombinációjaként. Kimutatjuk, hogy ez a gr. független, azaz bázisa U_1+U_2-nek.

Képezzük a köv. lin. kombinációt!

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \beta_{r+2} b_{r+2} + \dots + \beta_{r_1} b_{r_1} + \gamma_{r+1} c_{r+1} \dots + \gamma_{r_2} c_{r_2} = 0.$

$(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in T)$

Rendezzük az egyenlőséget!

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \beta_{r+2} b_{r+2} + \dots + \beta_{r_1} b_{r_1} = -\gamma_{r+1} c_{r+1} - \dots - \gamma_{r_2} c_{r_2}$

A bal oldalt jelöljük el „d"-vel! $(d \in U_1)$

A jobb oldal is egyenlő d-vel! $(d \in U_2)$

$\Downarrow$

$d \in U_1 \cap U_2$

d kifejezhető $(a_1, a_2 \dots a_r)$ lin kombinációjaként

d felírható $(c_{r+1}, c_{r+2} \dots c_{r_2})$ elemek lin. kombinációjaként.

Ez a két lin. kombináció megegyezik, és csak a következőképpen lehetséges.

$$d = 0a_1 + 0a_2 + \dots 0\,a_r + (-\gamma_{r+1})\,c_{r+1} + (-\gamma_{r+2})\,c_{r+2}) + \dots + (-\gamma_{r_2})\,c_{r_2}$$

$$d = \alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r + 0 \cdot c_{r+1} + \dots \qquad 0\,c_{r_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0 \;; \quad \gamma_{r+1} = \gamma_{r+2} = \dots = \gamma_{r_2} = 0$$

Ebből az következik, hogy „d" zérusvektor.

$$d = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \dots + \beta_{r_1} b_{r_1} = d = 0$$

Mivel a d gr-e U-nek, csak úgy lehet felírni, ha minden szorzótényezője 0.

$$\beta_r = \dots = \beta_{r_1} = 0.$$

Csak triviális módon tudjuk előállítani a zérusvektort, az $a_1, a_2 \dots a_r, b_{r+1}, \dots, b_{r_1}, c_{r+1} \dots c_{r_2}$ lin független vr-t, azaz bázis (bázisa a $U_1 \cap U_2$-nek)

$$\dim(U_1 + U_2) = r_1 + r_2 - r = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Def.: Legyenek U_1, U_2 U T test fölötti alterei.

$$U_1 + U_2 = \{a + b \mid a \in U_1,\ b \in U_2\}$$

$U_1 + U_2$ is altér.

Def.: Legyenek U_1 és U_2 U T test fölötti vektortér alterei.

A két altér U_1+U_2 összegét direkt összegnek nevezzük,

és $U_1 \oplus U_2$-vel jelöljük, ha U_1 és U_2 altér metszete

csupán a zérusvektort tartalmazza.

$U_1 \cap U_2 = \{0\}$

Tétel: U_1 és U_2 alterek összege $\Leftrightarrow$ direkt összeg, ha U_1+U_2

$a+b$ alakú elemeinek az előállítása egyértelmű.

Azaz a U_1+U_2 minden eleme csak egyféleképpen

állítható elő. $a \in U_1$, $b \in U_2$ $\underline{\underline{a+b=c}}$