16. tétel

A mátrix inverze; a mátrix rangja. A mátrix elemi sor- és oszlopátalakításai

Def.: $A_{n\times n}$ T test fölötti mátrixnak inverze a $B_{n\times n}$ T test fölötti mátrix, ha $A_{n\times n}\cdot B_{n\times n}=B_{n\times n}\cdot A_{n\times n}=E_{n\times n}=(\delta_{ij})_{n\times n}$

jel.: $A^{-1}_{n\times n}=B_{n\times n}$

Csak kvadratikus mátrixnak lehet inverze.

Tétel: Egy T test fölötti négyzetes mátrixnak ∃ inverze ⇔, ha a mátrix determinánsa nem 0.

Megjegyzés: Egy négyzetes mátrixot reguláris mátrixnak nevezünk, ha a mátrix determinánsa nem 0. Ellenkező esetben a mátrixot szinguláris mátrixnak hívjuk.

BIZ.: I., Legyen $A_{n\times n}$, $A^{-1}_{n\times n}=B_{n\times n}$

T test fölötti

Megmutatjuk, hogy $|A_{n\times n}|\neq 0$

$A_{n\times n}\cdot B_{n\times n}=B_{n\times n}\cdot A_{n\times n}=E_{n\times n}$

Képezzük ezek determinánsát!

$|A_{n\times n}\cdot B_{n\times n}|=|B_{n\times n}\cdot A_{n\times n}|=|E_{n\times n}|$

$|A_{n\times n}||B_{n\times n}|=|B_{n\times n}||A_{n\times n}|=|E_{n\times n}|=1\Rightarrow|A_{n\times n}|\neq 0$

(ha 0 lenne, nem lehetne a szorzat 1.)

II., Legyen $A_{n\times n}$ T test fölötti mátrix

$|A_{n\times n}|\neq 0.$

Megmutatjuk, hogy $A_{n\times n}$-es mátrixnak $\exists$ inverze.

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn}\end{pmatrix}, \qquad |A_{n\times n}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \neq 0$$

Képezzük a következő mátrixot!

$$\frac{1}{|A_{n\times n}|}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots A_{1n} \\ \vdots & \\ A_{n1} & A_{n2} \cdots A_{nn}\end{pmatrix}$$

A_{ij} : a mátrix determinánsának a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsa. ($i, j = 1, 2 \ldots n$)

A mátrixnak képezzük a transzponáltját!

$$\frac{1}{|A_{n\times n}|}=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A_{n\times n}|} & \frac{A_{21}}{|A_{n\times n}|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A_{n\times n}|} \\ \vdots & & & \\ \frac{A_{1n}}{|A_{n\times n}|} & \frac{A_{2n}}{|A_{n\times n}|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A_{n\times n}|}\end{pmatrix}$$

Azt állítjuk, hogy ez a mátrix az adott $A_{n\times n}$-es mátrix inverze. Ezt úgy látjuk be, hogy megmutatjuk, hogy szorzatuk bármilyen sorrendben az $E_{n\times n}$ mátrixot adja.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A_{n\times n}|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A_{n\times n}|} \\ \vdots & & \\ \frac{A_{1n}}{|A_{n\times n}|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A_{n\times n}|}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A_{n\times n}|}\begin{pmatrix} a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+\cdots a_{1n}\cdot A_{1n} & a_{11}\cdot A_{21}+a_{12}\cdot A_{22}+\cdots+a_{1n}A_{2n} & \cdots & a_{11}\cdot A_{n1}+a_{12}\cdot A_{n2}+\cdots+a_{1n}\cdot A_{nn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}\cdot A_{11}+a_{n2}\cdot A_{12}+\cdots a_{nn}\cdot A_{1n} & a_{n1}\cdot A_{21}+a_{n2}\cdot A_{22}+\cdots+a_{nn}A_{2n} & \cdots & a_{n1}\cdot A_{n1}+a_{n2}\cdot A_{n2}+\cdots+a_{nn}\cdot A_{nn}\end{pmatrix} =$$

→ Ferdekif. tétel

$$=\begin{pmatrix} |A_{n\times n}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A_{n\times n}| & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & |A_{n\times n}|\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A_{n\times n}|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} = E_{n\times n}$$

Hasonlóképpen igazolható, hogy ez a mátrix fordított sorrendbe szorozva is egységmátrixot ad eredményül.

Példa: Hat. meg az inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

I. Det. meghatározása

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$ a mátrixnak $\exists$ inverze.

II. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & -\frac{4}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{2}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Akkor is teljesül, ha:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -1/4 \\ \frac{1}{16} & 1/8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrix rangja:

Def.: Ha egy mátrixból kiválasztunk k sort és k oszlopot ($1 \leq k \leq \min(m,n)$ m: sorok, n: oszlopok száma), akkor e sorok és oszlopok találkozásánál elhelyezkedő elemek meghatároznak egy $k \times k$-s négyzetes mátrixot, amelynek a determinánsát az adott mátrix egy k-adrendű aldeterminánsának nevezzük.

Def.: Egy mátrix rangján (determináns rangján) értjük a mátrix zérustól különböző értékű aldeterminánsai rendjének a maximumát.

Másképp: Azt mondjuk, hogy a mátrix rangja „r", ha a mátrixból kiválasztható legalább egy nem 0 értékű r-edrendű aldeterminánsa, de minden r-nél magasabb-rendű kiválasztható aldetermináns értéke 0.

Példa: Határozzuk meg a def. alapján a mátrix rangját!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 9 \end{matrix} = -6+27-36+6-27+36=0$$

Emiatt a mátrix rangja nem lehet 3.

Válasszunk ki másodrendű determinánsokat!

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6=-5 \neq 0$$ Emiatt a mátrix rangja 2.

jel.: $r(A) = \rho(A) = 2$

A def. alapján a mátrix rangjának meghatározása 2-nél több sort vagy oszlopot tartalmazó mátrix esetén is nehézkes. Ezért más módszert is kidolgoztak a rang kiválasztására. Ezek egyike a következő:

A mátrix elemi átalakításai:

a., elemi sor átalakítások

b., elemi oszlop átalakítások

a., 1., A mátrix valamelyik sorának $\lambda \neq 0$ $(\lambda \in T)$ elemmel való szorzása.

II., A mátrix két tetszőleges sorának felcserélése.

III., A mátrix $\forall$ sora λ ($\in T$)-szorosának egy másik sorhoz való hozzáadása.

b; Ha a mátrix elemi sorátalakításaiban a sor ill. sorok helyett oszlopot ill. oszlopokat írunk $\Rightarrow$ megkapjuk a mátrix elemi oszlopátalakításait.

Tétel: A mátrix rangja az elemi sor- ill. oszlopátalakításokkal szemben invariáns (változatlan).

BIZ.: —

Egy mátrix elemi sor- ill. oszlopátalakításokkal mindig olyan alakra hozható, hogy a mátrix minden sorában és oszlopában legfeljebb egy zérustól különböző elem áll. Ekkor a mátrix rangja a zérustól különböző elemek számával egyenlő.

Példa:

Hat. meg a mátrix rangját elemi sor- és oszlopátalakításokkal!
(elemi átalakítások: a két mátrix rangban azonos)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{\left(\cdot \frac{1}{5}\right)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = r(A) = 2.$$