25. tétel

Félcsoport, csoport, kitüntetett elemek (neutrális elem, inverz elem). Véges és végtelen csoport. Permutáció-csoportok. Cayley-tétele.

Az S nem üres halmazt FÉLCSOPORT-nak nevezzük, ha a következő feltételek teljesülnek.

1., S tetszőleges a, b elempárjához hozzá van rendelve S-nek egy egyértelműen meghatározott c eleme; ha e hozzárendelést szorzással jelöljük, akkor ezt a hozzárendelést úgy is kifejezhetjük, hogy

$$ab = c \quad (c \in S)$$

II., teljesül az asszociativitás, azaz minden $a, b, c \in S$-re

$$a(bc) = (ab)c.$$

Ezek a félcsoport axiómái.

Ha az a, b és a b, a elempárokhoz azonos S-beli elemek vannak rendelve, azaz, ha

$$ab = ba \quad (\forall\, a, b \in S)$$

akkor S-et kommutatív félcsoportnak mondjuk.

(a, b-t ekkor felcserélhetőnek mondjuk.)

Mj.: 1., azt fejezi ki, hogy S-en művelet van értelmezve. Ha az a, b ($a, b \in S$) párok halmazát $S \times S$-sel jelöljük, akkor a művelet ezek szerint nem egyéb, mint $S \times S$-nek S-be való egyértelmű leképezése.

$$S \times S \to S$$

E művelet binér (elempárokon van értelmezve.)

Tétel: (Asszociativitás tétele)

Ha $a_1, \dots a_n$ az S félcsoport elemei $(n \geq 1) \Rightarrow$ $a_1 a_2 \dots a_n$ sorozat értéke független a zárójelezés-től, csupán a tényezők sorrendjétől függ.

Tétel: (Kommutativitás tétele).

Ha S kommutatív félcsoport és $a_1, \dots a_n \in S$ $(n \geq 1) \Rightarrow$

$$a_1 a_2 \dots a_n$$

sorozat független a tényezők sorrendjétől.

Kitüntetett elemek:

Ha S-ben $\exists$ e elem, hogy $ea = a$ $(\forall a \in S) \Rightarrow$ e-t S baloldali neutrális elemének nevezzük. (A jobboldali neutrális elemet az $ae = a$ egyenlőséggel definiáljuk.) Ha $e \in S$ bal- és jobboldali neutrális elem, $\Rightarrow$ NEUTRÁLIS ELEM-nek mondjuk. Ha S-ben van neutrális elem, S-et neutrális elemes félcsoportnak hívjuk.

Tétel: Ha az S félcsoportban e baloldali neutrális elem, és f jobboldali neutrális elem $\Rightarrow e = f$. Ennélfogva: S neutrális eleme egyértelműen meg van határozva.

Mj.: Ha S-ben a művelet szorzás, a neutrális elem egységelem, ha összeadás $\Rightarrow$ zéruselem.

Tétel: Ha az S neutrális elemes félcsoportban az a elemnek van a^* baloldali és van a^{**} jobboldali inverze $\Rightarrow a^* = a^{**}$. Ezért az inverz elem - ha $\exists$ - egyértelműen meg van határozva.

Tétel: Ha az a és b elemeknek van inverzük, a^* ill. b^*, $\Rightarrow$ ab-nek is van, és ez b^*a^*

BIZ: inverz elem egyértelmű létezése

$$a^* = a^*e = a^*(aa^{**}) = (a^*a)a^{**} = ea^{**} = a^{**}$$

Csoport: A csoport olyan halmaz, amelyben egy asszociatív invertálható művelet van értelmezve.

Csoportnak nevezünk olyan félcsoportot, amelynek van baloldali neutrális eleme, s amelyben minden elemnek van baloldali inverze.

Csoportaxiómák:

I, G tetszőleges a, b elempárjához hozzá van rendelve G-nek egyértelműen meghatározott C eleme.

II, $a(bc) = (ab)c$ minden $a, b, c \in G$-re

III, $\exists\ e \in G$, melyre $ea = a$, minden $a \in G$-re

IV, $\forall\ a \in G\ \exists\ a_0 \in G$, hogy $a_0 a = e$

Ha I-IV-en kívül teljesül:

V, $ab = ba\ \forall\ a, b \in G$-re $\Rightarrow$ G-t kommutatív vagy Ábel-csoportnak nevezzük.

Mj.: III. miatt a csoport nem üres halmaz.

Tétel: $\forall$ G csoportnak $\exists$ neutrális eleme, és G $\forall$ elemének $\exists$ inverze. Ezek egyértelműen meg vannak határozva.

a_0 a baloldali inverz:

$$aa_0 = e(aa_0) = (a_1a_0)(aa_0) = a_1(a_0a)a_0 = a_1ea_0 = a_1a_0 = e.$$

A G csoportot végesnek v. végtelennek mondjuk aszerint, hogy elemeinek száma véges v. végtelen. A csoport elemeinek számossága a G csoport rendje. (jele: $|G|$)

Permutáción most nem n elem valamilyen sorrendjét, hanem n elemű halmaznak önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését értjük. Ezáltal a permutációk szorzása mint leképezések szorzása definiálható. A permutáció jelölése:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

ahol $i_1, i_2 \dots i_n$ az $1, 2 \dots n$ elem valamilyen sorrendjét jelöli. Ez azt jelenti, hogy: $\pi: 1 \to i_1$, $2 \to i_2 \dots n \to i_n$

Ez a szorzás, mint a leképezések szorzása, asszociatív de általában nem kommutatív. Az identikus permutáció:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Ez a szorzásnak a neutrális elem: $\varepsilon\pi = \pi\varepsilon = \pi$ $\forall \pi$-re.

A π inverze:

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \text{ azaz } \pi^{-1}\pi = \pi\pi^{-1} = \varepsilon .$$

Tétel:
N elemű halmaz önmagára való leképezései csoportot alkotnak. Ez az n-edfokú szimmetrikus csoport. Az n-edfokú szimmetrikus csoport részcsoportjait n-edfokú permutációcsoportoknak hívjuk.

25/4