24. tétel

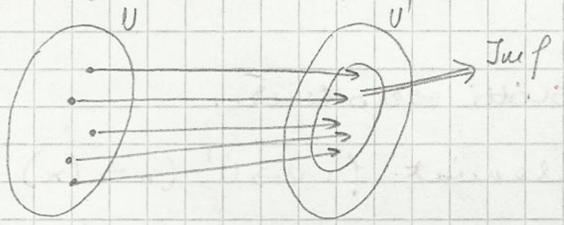
Lineáris leképezések képtere, rangja és magja.

Lineáris leképezés mátrixa.

Def.: Legyen U és U' T test fölötti vektorterek. $f: U \Rightarrow U'$ $(x \Rightarrow fx)$ homogén lineáris leképezés.

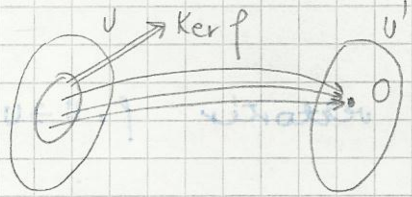
A lin. leképezés képterén értjük a következő halmazt. (Im f-vel jelöljük)

$\mathrm{Im}\, f := \{ y \,/\, y \in U' \text{ és alkalmas } x \in U,\ fx = y \}$



Def.: Legyen U és U' T test fölötti vektorterek. $f: U \Rightarrow U'$ $(x \Rightarrow fx)$ homogén lin. leképezés. Ezen homogén lin. leképezés magján értjük és Ker f-vel jelöljük a következő halmazt.

$\mathrm{Ker}\, f := \{ x \mid x \in U,\ fx = 0 \in U' \}$



Tétel: Legyen U és U' T test fölötti vektortér $f: U \Rightarrow U'$ $(x \Rightarrow fx)$ homogén lin. leképezés.

A homogén lin. leképezés képtere alterét képezi U'-nek, a ker f pedig altere U-nak.

Biz.: Biz be, h. ker f altere U-nak! Be kell látni, hogy ker f-ben teljesülnek az altérkritériumok.

1., $x_1, x_2 \in \ker f$, $(x_1, x_2 \in U)$ $\quad x_1 + x_2 \in U$

$$f(x_1+x_2) \Rightarrow \underbrace{fx_1}_{0 \in U'} + \underbrace{fx_2}_{0 \in U'} \Rightarrow 0 \in U' \overset{\text{def.sz.}}{\Rightarrow} x_1 + x_2 \in U'$$

Az $x_1 + x_2 \in \ker f$. Ker f zárt az összeadásra nézve.

II. $x_1 \in \ker f \Rightarrow x_1 \in U \Rightarrow \lambda x_1 \in U$

$$f(\lambda x_1) = \lambda \underbrace{fx_1}_{0 \in U'} = \lambda 0 \in U' = 0 \in U' \Rightarrow \lambda x_1 \in \ker f$$

Teljesül a másik altérkritérium is, tehát ker f altere U-nak

Tétel: Legyen U és U' T test fölötti vektorterek.
Legyen dim U = n , valamint $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ homogén lin leképezés. Ekkor $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f) = n$.

Def.: Legyen U és U' T test fölötti vektortér $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ homogén lin. leképezés.
Ezen homogén lin. leképezés rangján értjük az im f altér dimenzióját. Defektusán pedig a ker f dimenzióját értjük.

Def.: Legyen U, U' T test fölötti vektortér $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ homogén lin. leképezés.
Ezt a homogén lin. leképezést elfajulónak nevezzük, ha $x_1, x_2 \in U$ és $x_1 \neq x_2 \Rightarrow fx_1 \neq fx_2$.

Tétel: A $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ homogén lin. leképezés $\Leftrightarrow$ nem elfajuló, ha a magja csupán a zérusvektort tartalmazza.

Def.: Legyen U T test fölötti vektortér, továbbá $f: U \Rightarrow U$ $(x \to fx \in U)$ lin. transzformáció. U vektortér U' alterét invariáns altérnek nevezzük, ha $\forall\ x \in U'$ esetén a fx is $\in U'$. Azaz a lin. leképezés nem vezet ki a U' altérből.

Def.: Legyen U, U' T test fölötti vektorterek, és $\psi, f: U \Rightarrow U'$ $(x \to fx)$ homogén lin. leképezései. A két lin. leképezés összegén értjük és a szokásos módon $\psi + f$-vel jelöljük a következő leképezést:

$(\psi + f)\,x = \psi x + fx \quad \forall\, x \in U$ esetén

Def.: Legyen U, U' T test fölötti vektortér, ψ és $f: U \Rightarrow U'$ homogén lin. leképezések.

A f homogén lin. leképezés λ-szorosán értjük és (λf)-vel jelöljük a köv. leképezést:

$x = \lambda \cdot fx \quad \forall\, x \in U$ esetén.

Egyszerű számolással igazolhatók a köv. tételek:

Tétel: Két homogén lin. leképezés összege is, valamint egy homogén lin. leképezés λ-szorosa $(\lambda \in T)$ is homogén lin. leképezés.

Tétel: Jelöljük $\mathrm{Hom}\,(U, U')$-vel a $f: U \to U'$ $(x \to fx)$ összes homogén lin. leképezések halmazát.

$\mathrm{Hom}\,(U, U')$ a leképezések összeadására és skalárral való szorzására nézve vektorteret alkot T test fölött.

Def.: Legyen $U, W, \mathcal{U}$ T test fölötti vektortesek
! $f: U \to W$ $(x \to fx)$ homogén lin. leképezés
! $\Psi: W \to \mathcal{U}$ $(fx \to \Psi(fx))$ homogén lin. leképezés

A két leképezés szorzatán értjük és Ψf-vel jelöljük a következő leképezést.
$(\Psi f)x = \Psi(fx)$ $\forall$ $x \in U$ esetén

Megj.: $\Psi f: U \to \mathcal{U}$ $(x \to \Psi(fx))$

Tétel: $\Psi f: U \to \mathcal{U}$ $(x \to \Psi(fx))$ homogén lin. leképezések szorzata is homogén lin. leképezés.