23. tétel

A vektortér lineáris leképezései és transzformációi. Izomorf vektorterek. Műveletek lineáris leképezésekkel és transzformációkkal.

Def.: Legyenek U_1 és U_2 T test fölötti vektortere$k$. A $f: U_1 \to U_2$ $(x \to fx \ , x \in U_1)$ leképezést homogén lin. leképezésnek, röviden lin. leképezésnek nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

I., $\forall\, x, y \ (x, y \in U_1)$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$: ADDITÍV TULAJDONSÁG

II., $\forall\, x \ (x \in U_1)$ és $\forall\, \lambda \ (\lambda \in T)$ teljesül, hogy $f(\lambda x) = \lambda \cdot fx \Rightarrow$
$\Rightarrow$ homogén tulajdonság.

Def.: Legyen U T test fölötti vektortér. A $f: U \to U$ $(x \Rightarrow fx \in U,\ x \in U)$ homogén lin. leképezést lin. transzformációnak nevezzük (egy vektortérnek önmagába történő homogén lin. leképezése a lin. transzformáció)

Tétel: A f homogén lin. leképezés U_1 zérusvektorát U_2 zérusvektorára képezi le.

BIZ.: Legyenek U_1 és U_2 T test fölötti vektorterek,

$f: U_1 \Rightarrow U_2 \ (x \Rightarrow fx)$

$0_1 \in U_1$ (zérusvektora), $0_2 \in V_2$

$0_1 + 0_1 = 0_1$

$f(0_1 + 0_1) = f(0_1)$

$f(0_1) + f(0_1) = f(0_1) \quad (f0_1 \in V_2) \quad (a + x = a)$

$\underbrace{\qquad}_{f0_1 = 0_2}$

Megj.: A homogén lin. transzformáció a vektortér zérusvektorát változatlanul hagyja. (Önmagát rendeli hozzá.)

Def.: Legyenek V_1 és V_2 T test fölötti vektorterek. A $f: V_1 \to V_2$ $(x \to fx)$ leképezést izomorf leképezésnek nevezzük, ha teljesülnek a köv. feltételek.

- f bijektív
- $\forall x, y \; (x, y \in V_1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x \; (x \in V_1) \; \forall \lambda \; (\lambda \in T) \quad f(\lambda x) = \lambda (fx)$

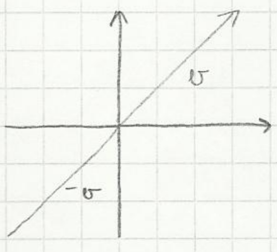
<u>Azaz</u>: a $f: V_1 \to V_2$ izomorf leképezés, ha homogén lin. leképezés, és a leképezés bijektív.

Def.: A V_1 és V_2 T test fölötti vektortereket egymással izomorfaknak nevezzük, ha létrehozható közöttük izomorf leképezést.

<u>Példák homogén lin. leképezésre</u>:

- ha V_1 vektortér minden egyes eleméhez a V_2 vektortér zérusvektorát rendeljük, akkor ez homogén lin. leképezése V_1-nek V_2-re.

- Tekintsük a koordinátarendszer által meghatározott síkot.



$fv = -v$

$f: V_2 \to V_2$

Ez a f leképezés a síkbeli vektorok valós számok fölötti vektorterének önmagába történő homogén lin. leképezése sőt, lin. transzformáció.

Az izomorf vektorterek egyik jellemző sajátossága, hogy egy vektorrendszer ⇔ lin. összefüggő, ha izomorfizmus melletti képeik is lin. összefüggők.

U, U', T test fölötti

$\varphi : U \to U'$ $(x \to \varphi x)$ izomorfizmus (izomorf leképezés)

$a_1, a_2 \dots a_r \in U$.

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots \lambda_r a_r = 0$ $(\lambda_i$ nem mind $0)$

$\varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r) = \varphi 0 = 0 \in U'$

$\lambda_1 \varphi a_1 + \lambda_2 \varphi a_2 + \dots + \lambda_r \varphi a_r = 0 \in U'$

Megj.: Ha egy vektorrendszer lin. független, ebből nem következik az, hogy izomorfizmus melletti képelemek is lin. függetlenek.

Tétel: ∀ két n dimenziós vektortér izomorf egymással.

BIZ.:

U, U' T test fölötti vektorterek

$\dim U = \dim U' = n$

$B = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ egy bázisa U-nak

$B' = \{e_1', e_2' \dots e_n'\}$ egy bázisa U'-nek.

Legyen $x \in U \Rightarrow x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ $(x_i \in T)$

Tekintsük a köv. leképezést!

$\varphi : U \to U'$

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} x_1 e_1' + x_2 e_2' + \dots + x_n e_n'$

Megmutatható, h ez a φ leképezés bijektív és homogén lin. leképezés, azaz izomorfizmus.

Tehát valóban U és U' n dimenziós vektorterek izomorfak egymással.

Következmény: Izomorfizmustól eltekintve egy darab n dimenziós vektortér létezik.

<u>Homogén lin. leképezés megadása:</u>

Tétel: Legyen U, U' T test fölötti vektorterek. A $f: U \to U'$ homogén lin. leképezést a báziselemek képei egyértelműen meghatározzák, továbbá a báziselemek képeit tetszőlegesen megválasztva mindig van olyan homogén lin. leképezés, amelyek a báziselemeket a megadott képekbe viszik át.