39. tétel

$\pi(x)$ becslése, p_n becslése és a Bertrand posztulátum.

Sejtések prímszámokkal kapcsolatban.

Legyen $x > 0$ $(\in \mathbb{R})$. $\pi(x)$-szel jelöljük az x-nél nem nagyobb prímszámok számát.

pl.: $\pi(\sqrt{2}) = 0$ $\qquad$ $\pi(7) = 4$

A matematikusok régóta foglalkoznak azzal, h. $\pi(x)$ értékét minél pontosabban meghatározzák.

Nyilvánvaló: $n > 1$ $(\in \mathbb{N})$ esetén $\pi(n) < n$ (nem minden term. szám prím)

Tétel: (Hadamard, de la Vallée Poussin: 1896)

Nagy Prímszámtétel:

Legyen $\pi(x)$ az $x > 1$ valós számnál nem nagyobb prímszámok száma. Ekkor $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, → aszimptotikusan megegyezik → közelítő fgv

ahol $\log x$ az x természetes alapú logaritmusát jelöli és az aszimptotikus egyenlőség azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

A tétel alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$(1-\varepsilon)\frac{x}{\log x} < \pi(x) < (1+\varepsilon)\frac{x}{\log x},$$

ha x az ε-tól függően elég nagy.

Eredeti biz: komplex fgv-tannal

1949: Erdős, Selberg: elemi bizonyítás

* Tétel: $\forall\, n \geq 2$ term. szám esetén igaz az

$$\frac{1}{6}\,\frac{n}{\log n} < \pi(n) < 6\,\frac{n}{\log n}$$ egyenlőtlenség.

- p_n: n-edik prímszám.
- $p_n > n$ igaz, hiszen $1, 2 \ldots n$ számok között nem mindegyik prím

Tétel: Ha p_n az n-edik prímszám $\wedge$ $n > 1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{6}\, n \log n < p_n < 12\, n \log n.$$

BIZ.: Mivel $\pi(p_n) = n$ (n-edik prímszámig n db prím van)

Az előző tétel (*) miatt:

$$\pi(p_n) = n < 6\,\frac{p_n}{\log p_n}$$

így $p_n > n$ felhasználásával:

$$p_n > \frac{1}{6}\, n \log p_n > \frac{1}{6}\, n \log n$$

Másrészt (*) miatt:

$$\pi(p_n) = n > \frac{1}{6}\,\frac{p_n}{\log p_n} \Rightarrow p_n = 6n \log p_n.$$

(*) tétel miatt:

$$\pi(n^2) > \frac{1}{6}\,\frac{n^2}{\log n^2} = n\,\frac{n}{12 \log n} > n = \pi(p_n)$$

ha $n \geq 47$ ezért $p_n < n^2$ $\wedge$ mivel végtelen sok $4k+1$ alakú prím van $\Rightarrow$ $p_n < 6n \log n^2 = 12\, n \log n$,

ami a „$4k-1$ alakú prímek száma végtelen" tétellel a tételt bizonyítja $n \geq 47$. Az $n = 2, 3 \ldots 46$ esetek közvetlenül beláthatóak.

Mj.: A nagy prímszámtétel alapján igazolható:

$p_n \sim n \log n$, azaz $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1$.

Tétel: (Csebisev)

$\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$

$x >> : \quad c_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{\log x}$

(nagy prímszámtételben a $c=1$ eset.)

Tétel: Megadható két c_1, c_2 pozitív valós szám, úgy, hogy az n-nél nem nagyobb prímek reciprokösszegére:

$$c_1 \log(\log n) < \sum_{p \le n} \frac{1}{p} < c_2 \log(\log n)$$, ha n elég nagy.

Tétel: (Bertrand-posztulátum (Csebisev-tétel))

Ha $n > 1$ egész szám $\Rightarrow$ az $(n, 2n)$ nyílt intervallum tartalmaz legalább egy prímet.

Páros Goldbach-sejtés:

$\forall\, n > 4$ páros felírható $n = p_1 + p_2$ alakban, ahol p_1, p_2: páratlan prímek.

Nem sikerült sem cáfolni, sem bizonyítani.

Biz. eddig: $2n = p + Q$, ahol $Q = p_1 \cdot p_2$ $\quad p_1, p_2$: prímek.

Páratlan Goldbach-sejtés:

$\forall n > 7$ páratlan szám felírható $n = p_1 + p_2 + p_3$ alakban,

ahol p_1, p_2, p_3 : prímek.

Biz.: Vinogradov: bebizonyította, minden elég nagy páratlan számra, de a korlát még nem érhető el.

Wieferich-prímek: $2^{p-1} - 1$ alakúak p: prím (páratlan)

ilyenek: 1093, 3511

Mersenne-prím: $M_n = 2^n - 1$ alakú

Ma 34 ismert: $2^{1257787} - 1$