44. tétel

Diofantikus approximáció. A Pell-egyenlet.

Def.: Legyen $\varepsilon > 0$ valós szám. Akkor mondjuk, hogy egy α valós szám ε rendben approximálható, ha $\exists$ $c = c(\alpha) > 0$ csak α-tól függő konstans, úh. az

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^{\varepsilon}}$$

egyenlőtlenség végtelen sok p, q egész szám esetén fennáll.

Tétel: A racionális számok első rendben approximálhatók, de magasabb rendben nem.

BIZ.: Legyen $\frac{a}{b}$ egy racionális szám, melyre $(a, b) = 1$. $\Rightarrow$ $ax - by = 1$ diofantikus egyenlet megoldható $\wedge$ végtelen sok $x, y \in \mathbb{Z}$ mego. van.

Végtelen sok q, p egész esetén:

$$aq - bp = 1. \quad / : bq$$

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{|bq|} \leq \frac{1}{|q|}$$

Tfh.: $q > 0$, mert ellenkező esetben (p, q) számpárt $(-p, -q)$-val helyettesíthetjük, így:

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q} < \frac{2}{q}$$

Végtelen sok $p, q \in \mathbb{Z}$ számpár esetén $\frac{a}{b}$ első rendben approximálható.

A tétel 2. fele: ind.

Tfh: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ $\varepsilon > 1$ rendben approximálható, vagyis valamely $c>0$ konstans mellett

$$0 < \left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^{\varepsilon}}$$

végtelen sok p, q egész esetén. $\Rightarrow$

$$0 < |aq - bq| \le \frac{c|b|q}{q^{\varepsilon}} = \frac{c|b|}{q^{\varepsilon - 1}},$$

ami nem teljesülhet végtelen sok q esetén, hiszen $|aq - bp|$ pozitív egész, és $\varepsilon - 1 > 0$ miatt

$$\frac{c|b|}{q^{\varepsilon-1}} \to 0, \text{ ha } q \to \infty,$$

így 0 és $c|b|/q^{\varepsilon-1}$ közé nem eshet egész szám, ha $q \gg$.

↯ bizonyítja a tétel 2. felét.

Tétel: Minden irracionális α esetén $\exists$ egy $c = c(\alpha) \le 1$ pozitív konstans úh.

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^2}$$

végtelen sok p, q egész esetén.

BIZ.: Legyen Q egy tetszőlegesen nagy pozitív egész, és tekintsük:

$$\alpha - [\alpha],\ 2\alpha - [2\alpha],\ \ldots,\ (Q+1)\alpha - [(Q+1)\alpha] \text{ számokat.}$$

Ezek az egészrész fgv tulajdonságai, α irracionalitása miatt a $(0,1)$ nyílt intervallumban helyezkednek el, különbözőek, számuk: $Q+1$ db. Osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot a $0, 1/Q, 2/Q, \ldots, Q/Q = 1$ pontokkal Q db $1/Q$ hosszúságú intervallumra.

A számok nem esnek intervallum végpontjába, mivel α irracionális $\wedge$ számuk $Q+1$ $\Rightarrow$ $\exists$ olyan intervallum, amely két számot tartalmaz, azaz $\exists$ i,j $(1 \le i < j \le Q+1)$ úh, $i\alpha - [i\alpha]$ $\wedge$ $j\alpha - [j\alpha]$ ugyanabban az intervallumban van.

Ezekre:

$$(*)\quad |(j\alpha - [j\alpha]) - (i\alpha - [i\alpha])| = |(j-i)\alpha - ([j\alpha] - [i\alpha])| < \frac{1}{Q}$$

Legyen $j - i = q$ $\wedge$ $[j\alpha] - [i\alpha] = p$

Így meghatározott p,q számok egészek, $0 < q \le Q$ $\wedge$ $(*)$

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{Q} \quad \text{azaz}$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ} < \frac{1}{q^2}.$$

Tehát $\exists$ $p/q \in \mathbb{Q}$, amely másodrendben approximálja α-t $c=1$ konstanssal. $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 0$ miatt megadható $Q' > 0$ egész, úh: $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{qQ'}$

Megismételve az előző eljárást: megadható $p', q' \in \mathbb{Z}$, melyekre:

$$\left|\alpha - \frac{p'}{q'}\right| < \frac{1}{q'Q'} \le \frac{1}{q'^2}$$

p', q' különbözik $p,q \in \mathbb{Z}$-től.

Ezt folytatva végtelen sok különböző $p/q \in \mathbb{Q}$ adható, mely másodrendben approximálja α-t $c = 1$ konstanssal.

Megj.: Minden irracionális szám legalább másodrendben approximálható.

A Pell-egyenlet megoldása:

Def.: Pell-egyenlet: $x^2 - Dy^2 = 1$ egyenlet, ahol $D \in \mathbb{Z}$, az egyenlet $x, y \in \mathbb{Z}$ megoldásait keressük.

$\left.\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{array}\right\}$ megoldást triviális megoldásnak nevezzük.

I., Ha $D = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, y tetszőleges egész megoldások

II., Ha $D < 0 \Rightarrow x = \pm 1$, $y = 0$ megoldások

$D = -1 \Rightarrow x = 0$ és $y = \pm 1$ megoldások

III., Ha D négyzetszám (d^2), ahol $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x+dy)(x-dy) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x+dy| = 1$, $|x-dy| = 1$.

Aminek konkrét esetben véges számú összes megoldása könnyen megadható.

Tétel: Ha $D > 0$, $D \neq d^2$ (nem teljes négyzet) $\Rightarrow$ az $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell-egyenletnek van nem triviális megoldása.

BIZ.: Dirichlet-tételből következik.

Def.: Az (u, v)-t alapmegoldásnak nevezzük, ha $(u, v) \in \mathbb{Z}^+$, $u^2 - Dv^2 = 1$, $\forall\, x, y > 0$ megoldás esetén $x + \sqrt{D}y \geq u + \sqrt{D}v$.

Megj.: Ilyen alapmegoldás nyilván $\exists$, egyértelműen meghatározott.

Tétel: ! $D > 0$ egy nem teljes négyzet ($D \in \mathbb{N}$). Ekkor az $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell-egyenletnek végtelen sok $(x, y) \in \mathbb{Z}$ megoldása $\exists$.

Ha (u, v) az egyenlet alapmegoldása $\Rightarrow$ az összes megoldásai azon (x, y) számpárok, melyeket az $x + \sqrt{D}y = \pm(u \pm \sqrt{D}v)^n$ egyenlőség definiál, ahol $n = 0, 1, 2 \ldots$ értékeket vehet fel.