42. tétel

A d fgv értékkészletére vonatkozó tételek. Számelméleti fgv-ek átlagértékét fgv-e. A d középértékű fgv.

Tétel: $d(n) = 1 \Leftrightarrow$, ha $n = 1$ $\wedge$ $\forall m > 1 \in \mathbb{Z}$-hoz végtelen sok $n \in \mathbb{N}^+$ létezik, amelyekre $d(n) = m$.

BIZ.: Mivel $n = 1$ az egyetlen pozitív egész, melynek egyetlen pozitív osztója van $\Rightarrow$ az első állítás triviális.

Adott $m > 1$ esetén:

Tekintsük $n = p^{m-1}$ egész számokat, ahol p prím.

Ekkor $d(n) = d(p^{m-1}) = m$, és mivel végtelen sok prímszám van $\Rightarrow$ az állítás második része is igaz.

Tétel: Tetszőleges $w \in \mathbb{N}^+$ esetén végtelen sok szomszédos pozitív egész számokból álló $a-1$, a, $a+1$) számhármas létezik, melyekre

$$d(a-1) - d(a) \geq w \ \wedge\ d(a+1) - d(a) \geq w.$$

(Azaz a d fgv grafikonjában végtelen sok, legalább w „mélységű" völgyet találunk.)

BIZ.: Szükséges Dirichlet-tétele, amely kimondja:

Legyen $a, b \in \mathbb{N}^+$ $\wedge$ $(a, b) = 1$. Az

$a, a+b, a+2b, \ldots$ számtani sorozatban

végtelen sok prímszám van.

Válasszunk $2w$ számú különböző prímet, melyek:

$p_1, p_2, \ldots, p_w$ $\wedge$ $q_1, q_2, \ldots, q_w$

és legyen

$$P = \prod_{i=1}^{\omega} p_i \quad \text{és} \quad Q = \prod_{i=1}^{\omega} q_i$$

Tekintsük az
$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod P \\ x &\equiv -1 \pmod Q \end{aligned}\right\}$$

szimultán kongruenciarendszert!

Ez megoldható $\wedge$ egyetlen x_0 megoldása van $\pmod{PQ}$

$$\Downarrow$$

$x = x_0 + PQk$ alakúak, ahol $k \in \mathbb{Z}$

$(x_0, PQ) = 1 \wedge x_0 > 1$, így Dirichlet-tétele szerint:

$\{x : x = x_0 + PQk,\ k \in \mathbb{N}\}$ halmazban végtelen sok prím van.

Megmutatjuk, ha $a = p$ prím a halmazba tartozik $\Rightarrow$ p megoldása a kongruenciarendszernek!

$$\underbrace{p \equiv 1 \pmod P \qquad p \equiv -1 \pmod Q}$$

$$\Downarrow$$

$p_i \mid (p-1) \wedge q_i \mid (p+1) \quad \forall\ i\ (1 \le i \le \omega)$ indexre.

Ezért $p-1$-nek és $p+1$-nek legalább annyi osztója (pozitív osztója) van, mint amennyit az ω db különböző prímből elő lehet állítani.

A $d = 1$ osztóval együtt ezek száma: 2^{ω}.

Így: $d(p-1) \ge 2^{\omega}$, $d(p) = 2$, $d(p+1) \ge 2^{\omega}$, amelyből

$$d(p-1) - d(p) \ge 2^{\omega} - 2 \ge \omega \ \wedge\ d(p+1) - d(p) \ge 2^{\omega} - 2 \ge \omega$$

egyenlőtlenségek adódnak, ha $\omega \ge 2$.

Tétel: Tetszőleges $\varepsilon > 0$ valós számhoz $\exists$ olyan ε-tól függő c pozitív konstans, h. $\forall$ n pozitív egészre:

$$d(n) < c n^{\varepsilon}.$$

Def.: Legyen f számelméleti fgv és

$$F(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n).$$

Az $\overline{F}(n) = \frac{F(n)}{n}$ hozzárendeléssel értelmezett $\overline{F}$ számelméleti fgv-t az f átlagérték fgv-ének nevezzük.

Def.: Legyen f és g két valós fgv. Ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \Rightarrow \text{ azt mondjuk, hogy } f$$

aszimptotikusan egyenlő g-vel és ezt az $f \sim g$ szimbólummal jelöljük.

Vezessük be a következőket!

$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i)$ $\qquad$ $\overline{S}(n) = \frac{S(n)}{n}$

$\Phi(n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(i)$ $\qquad$ $\overline{\Phi}(n) = \frac{\Phi(n)}{n}$

$V(n) = \sum_{i=1}^{n} \partial(i)$ $\qquad$ $\overline{V}(n) = \frac{V(n)}{n}$

$D(n) = \sum_{i=1}^{n} d(i)$ $\qquad$ $\overline{D}(n) = \frac{D(n)}{n}$

Egyenlőségek:

$\overline{S} \sim f$, ahol $f(n) = \frac{\pi^2}{6} n$

$\overline{\Phi} \sim g$, ahol $g(n) = \frac{3}{\pi^2} n$

$\overline{V} \sim h$, ahol $h(n) = \log \log n$ $\quad (n > 1)$

$\overline{D} \sim t$, ahol $t(n) = \log n$.

Tétel: A d számelméleti fgv átlagérték fgv-e aszimptotikusan egyenlő a log fgv-nyel, azaz

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(i) \sim \log n .$$

BIZ: Szükség van:

$$\text{I.)}\quad \log(n+1) < \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} < 1 + \log n$$

egyenlőtlenségre, amelyet szokás integrállal, ill. az analízisből ismert

$$\text{II.)}\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < e < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

egyenlőtlenséggel igazolni.

Most az egyenlőtlenséggel bizonyítjuk.

$$\text{II.)} \qquad /\log$$

$$m \log \frac{m+1}{m} < 1 < (m+1)\log\frac{m+1}{m} \qquad / : \log\frac{m+1}{m}$$

reciprokát véve

$$\text{III.)}\quad \frac{1}{m+1} < \log\frac{m+1}{m} < \frac{1}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{m=1}^{n} \log\frac{m+1}{m} < \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}$$

log azonosságai miatt

$$\log(n+1) = \log\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{m=1}^{n}\log\frac{m+1}{m} < \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}$$

III.)-ból:

$$1 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m+1} < 1 + \sum_{m=1}^{n-1}\log\frac{m+1}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} < 1 + \log\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\right) = 1 + \log n$$

Így I.)-et igazoltuk.

A bizonyításhoz szintén felhasználjuk a

IV.) $D(n) = d(1) + d(2) + \dots + d(n) = \sum_{m=1}^{n} \left[\frac{n}{m}\right]$

Ez igaz, mert az osztók számának meghatározása nem függhet az összeszámlálási módtól. A jobb oldali összegzéskor azt vizsgáljuk, h. az adott m az $1, 2 \dots, n$ számok közül hánynak osztója, míg a másik esetben az $1, 2 \dots, n$ számok osztóinak a számát összegezzük.

Adunk $D(n)$-re alsó- és felső becslést. (I.) és IV.) segítségével)

$$D(n) = \sum_{m=1}^{n} \left[\frac{n}{m}\right] \geq \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{n}{m} - 1\right) = -n + n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} > n \log(n+1) - n > n \log n - n$$

és $D(n) = \sum_{m=1}^{n} \left[\frac{n}{m}\right] \leq \sum_{m=1}^{n} \frac{n}{m} = n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} < n(1 + \log n)$

$$\Downarrow$$

V.) $\quad -1 < \frac{D(n)}{n} - \log n < 1$

Legyen VI.) $r(n) = \frac{D(n)}{n} - \log n,$

V.) miatt $|r(n)| < 1$

VI.) -ból $\quad \frac{\overline{D}(n)}{\log n} = \frac{D(n)}{n \log n} = 1 + \frac{r(n)}{\log n}$

$$\Downarrow$$

$|r(n)| < 1$ miatt $\quad \lim_{n \to \infty} \frac{\overline{D}(n)}{\log n} = 1$, azaz $\overline{D} \sim \log$