41. tétel

Tökéletes, illetve barátságos számok. Összegzési, illetve megfordítási függvények. A Dirichlet-féle konvolúciós szorzás.

Def.: Az n pozitív egész számot tökéletes számnak nevezzük, ha $\sigma(n) = 2n$. Ha $\sigma(n) > 2n$, illetve $\sigma(n) < 2n$ akkor az n számot osztókban bővelkedő, illetve szűkölködő számnak nevezzük.

Pl.: 6. $1+2+3=6$.

Tétel: Az n páros pozitív egész szám $\Leftrightarrow$ tökéletes, ha

$$n = 2^{p-1}(2^p-1)$$

alakú, ahol p és 2^p-1 is prímszám.

- ha n ilyen alakú $\Rightarrow$ tökéletes (~300 Euklidesz)
- ha n páros tökéletes $\Rightarrow$ n ilyen alakú (~1800 Euler)

BIZ.: I., Legyen $n = 2^{p-1}(2^p-1)$.

Mivel $(2^{p-1}, 2^p-1) = 1$ és 2^p-1 prím

$$\sigma(n) = \sigma(2^{p-1}(2^p-1)) = \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p-1) = \frac{2^p-1}{2-1}(1+2^p-1) =$$

$$= 2^p(2^p-1) = 2(2^{p-1}(2^p-1)) = 2n$$

Azaz n valóban tökéletes szám.

II., Legyen $n = 2^\alpha m$, ahol $(2,m)=1 \wedge \alpha \geq 1$.

Tfh: n tökéletes szám, azaz $2n = \sigma(n)$.

$$\Downarrow$$

$$2^{\alpha+1} m = 2\cdot 2^\alpha m = \sigma(2^\alpha)\sigma(m) = (2^{\alpha+1}-1)\sigma(m)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}-1} = \frac{\sigma(m)}{m}$$

Mivel $(2^{\alpha+1}, 2^{\alpha+1}-1) = 1 \Rightarrow \exists\ k>0\ (k \in \mathbb{Z})$

$$\sigma(m) = k2^{\alpha+1} \text{ és } m = k(2^{\alpha+1}-1) = k2^{\alpha+1}-k$$

Ebből látható $\sigma(m) = m + k \wedge k|m$. Tehát $\sigma(m)$ az m két pozitív osztójának összegével egyenlő. Ez csak akkor fordulhat elő, ha m prím és $k=1$.

Így Erdős Pál tétele miatt: $m = 2^{\alpha+1}-1$, azaz $\alpha+1 = p$-vel

$$n = 2^{p-1}(2^p-1),$$

ahol $m = 2^p-1$ prím.

2^p-1 csak akkor prím, ha p prím. Ugyanis: ha $p = qr$ $(q, r \geq 2) \Rightarrow 2^p-1 = (2^q)^r - 1^r$ osztható 2^q-1-gyel, így 2^p-1 összetett.

Mj.: A tételből adódik, hogy annyi tökéletes szám van, mint Mersenne-féle prímszám.

Def.: Az n és m pozitív egészeket barátságos számpárnak nevezzük, ha $\sigma(n) = \sigma(m) = n+m$.

Tétel: Legyen $p_n = 3\cdot 2^n - 1$ és $q_n = 9\cdot 2^{2n-1}-1$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$.

Ha $p_{n-1}, p_n \wedge q_n$ egyszerre prímek $\Rightarrow$ az

$$a = 2^n p_{n-1} p_n \wedge b = 2^n q_n$$

számok barátságos számpárt alkotnak.

Def.: Legyen $f, g \in D$. $[D = \{f : f \text{ számelméleti fgv}\}]$

Az f és g Dirichlet-féle konvolúcióján értjük $\wedge$ $f * g$-vel jelöljük az

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2)$$

egyenlőséggel meghatározott számelméleti fgv-t, ahol az összegzés n összes pozitív osztójára értendő.

Tétel: A $(D;*)$ struktúra egységelemes félcsoport, amelynek az i számelméleti fgv az egységeleme.

BIZ.: A D halmaz nyilvánvalóan zárt a $*$ műveletre.

A kommutatív tulajdonság $(f*g = g*f)$ teljesül, mivel a konvolúció def.-ja szerint mindkét oldal ugyanaz az összeg $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$-ra.

A $*$ művelet asszociativitása:

Legyen $f, g, h \in D$:

$$((f*g)*h)(n) = \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} (f(d_1) g(d_2)) h(d_3) =$$

$$= \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(d_1)(g(d_2)\, h(d_3)) = (f*(g*h))(n)$$

Az i egységelem: $(i*f = f)$ $\forall\, f$ számelméleti fgv-re)

$$(i*f)(n) = \sum_{d|n} i(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = i(1) f(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} i(d) f\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$= 1 f(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} 0 \cdot f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n) \quad \forall\, n\text{-re}.$$

Mivel asszociatív struktúrában 1 egységelem lehet $\Rightarrow$ i az egyetlen egységelem $(D,*)$-ban.

Tétel: Az f számelméleti fgv-nek $\Leftrightarrow$ létezik inverze a $*$ műveletre nézve, ha $f(1) \neq 0$.

BIZ.: Ha f-nek van inverze, melyet jelöljünk f^{-1}-gyel $\Rightarrow$

$(f * f^{-1})(n) = i(n)$ teljesül $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$ esetén, így

$$(f * f^{-1})(1) = i(1)$$

Ebből kapjuk, hogy

$$(f * f^{-1})(1) = f(1) f^{-1}(1) = i(1) = 1. \quad \text{miatt } f(1) \neq 0$$

Legyen $f(1) \neq 0$.

A f^{-1} fgv-nek $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesítenie kell az

$$(f * f^{-1})(n) = i(n) \text{ -t.}$$

$(f * f^{-1})(1) = f(1) f^{-1}(1) = 1$ -ből kapjuk, h.

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}.$$

$f^{-1}(2)$ meghatározható az

$$(f * f^{-1})(2) = f(1) f^{-1}(2) + f(2) f^{-1}(1) = i(2) = 0 \text{ -ból,}$$

azaz

$$f^{-1}(2) = -\frac{f(2) f^{-1}(1)}{f(1)}$$

Teljes indukcióval belátható, h. $f^{-1}(n)$ értéke mindig meghatározható az $f(k)$ és $f^{-1}(l)$ értékek ismeretében, ahol $1 \leq k \leq n$ és $1 \leq l \leq n-1$.

f^{-1} egyértelműsége a $*$ asszociativitásából következik.

Tétel: Legyen $f, g, h \in D$, létezzen az f^{-1} számelméleti fgv. $f * g = h \Leftrightarrow$, ha $g = f^{-1} * h$

Tétel: Az e és a μ számelméleti fgv. egymás inverze a konvolúciós szorzásra nézve.

Következmény: (Az előző két tételből)

Moebius-féle inverziós formula

Legyen $f, g \in D$. $e * f = g \Leftrightarrow$, ha $f = \mu * g$

Def.: Ha $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, $\Rightarrow$ a g számelméleti fgv-t az f számelméleti fgv összegzési fgvének nevezzük. Ha pedig $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$, akkor f-et a g fgv Moebius-transzformáltjának nevezzük.

Tétel: Ha f és g multiplikatív, akkor $f * g$ is az.