40. tétel

Multiplikatív és additív számelméleti függvények. Nevezetes számelméleti függvények multiplikativitása, illetve additivitása.

Def.: Egy $f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ függvényt számelméleti függvénynek nevezünk.

Def.: Az f számelméleti függvényt multiplikatívnak nevezzük, ha bármely $a, b \in \mathbb{N}^+$ és $(a,b) = 1$ esetén $f(ab) = f(a) f(b)$. Ha az $(a,b)=1$ feltétel elhagyható $\Rightarrow$ f fgv totálisan multiplikatív.

Def.: Az f számelméleti fgvt additívnak nevezzük, ha $\forall\, a, b \in \mathbb{N}^+ \wedge (a,b)=1$ esetén $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Ha az $(a,b)=1$ feltétel elhagyható $\Rightarrow$ totálisan additív.

Tétel: Ha az f számelméleti fgv multiplikatív $\wedge$ $f(n) \neq 0 \Rightarrow$ $f(1)=1$. Ha pedig az f számelméleti fgv additív $\Rightarrow$ $f(1)=0$.

BIZ.: Legyen f multiplikatív. Mivel $f(n) \not\equiv 0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^+$, amelyre $f(n) \neq 0$ $\wedge$ f multiplikativitása miatt

$$f(n) = f(n \cdot 1) = f(n) f(1) \Rightarrow f(1) = 1 \text{ adódik.}$$

Ha f additív $\Rightarrow$ $f(n) = f(n \cdot 1) = f(n) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ következik.

Tétel: Multiplikatív fgv-ek szorzata is multiplikatív, additív fgv-ek összege is additív, ahol $f \cdot g$, $f+g$ a következő módon értelmezett:

$$(fg)(n) = f(n)\,g(n)$$
$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$

Tétel: Legyenek az $a_1, a_2 \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ pozitív egész számok páronként relatív prímek. Ha az f számelméleti fgv multiplikatív $\Rightarrow f(a_1 a_2 \ldots a_k) = \prod_{i=1}^{k} f(a_i)$

Ha az f számelméleti fgv additív $\Rightarrow f(a_1 a_2 \ldots a_k) = \sum_{i=1}^{k} f(a_i)$

Tétel: (Erdős Pál)

Ha f totálisan additív és szigorúan monoton növekedő számelméleti fgv, akkor $f(n) = c \log n$, ahol c egy konstans.

BIZ: indirekt módon.

Nevezetes számelméleti fgv-ek:

e : $e(n) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$

i : $i(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 1 \\ 0, & \text{ha } n \geq 2 \end{cases}$

u : $u(n) = n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$

d : $d(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \geq 1}} 1$ n pozitív osztóinak a száma

$\rightarrow$ számoljuk meg, h. n-nek hány pozitív osztója van.

σ : $\sigma(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \geq 1}} d$ $\sigma(n)$ az n pozitív osztóinak az összege

φ : $\varphi(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 1 \\ |P_n|, & \text{ha } n \geq 2 \end{cases}$ $\varphi(n)$ a $0, 1, \ldots, n-1$ sorozatból n-hez relatív prímek számát jelöli

(Euler-féle φ fgv).

λ : $\lambda(n) = \begin{cases} 0, \text{ ha } n = 1 \\ r, \text{ ha } n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \quad (\alpha_i \geq 1) \end{cases}$ hány különböző prímszám van a prímfaktorizációs alakban

Ω : $\Omega(n) = \begin{cases} 0, \text{ ha } n = 1 \\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i, \text{ ha } n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \end{cases}$ jelöli az összes prím számát

λ : $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$

(Liouville - féle fgv)

Λ : $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, \text{ ha } n = p^\alpha \ (\alpha \geq 1) \\ 0, \text{ egyébként} \end{cases}$

(Von Mangoldt - féle függvény)

μ : $\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ ha } n = 1 \\ (-1)^r, \text{ ha } n = p_1 \cdots p_r \quad (p_i \neq p_j, \text{ ha } i \neq j) \\ 0, \text{ ha } \exists\, p \text{ prím, h. } p^2 \mid n. \end{cases}$

(Moebius - féle fgv.)

Tétel : Multiplikatív :

totálisan : e, i, u, λ

: d, σ, φ, μ

Additív :

totálisan : Ω

: λ

Se nem multiplikatív, se nem additív :

Λ

Tétel : A μ számelméleti fgv multiplikatív.

BIZ.: Ha $n = 1$ és $m \geq 1 \Rightarrow \mu(m1) = \mu(m) = \mu(m)1 = \mu(m)\mu(1)$

Ha $n > 1$, $m > 1$ és $\exists$ olyan p prím, hogy $p^2 \mid m$, $\Rightarrow$

$p^2 \mid mn$ miatt : $\mu(mn) = 0 = 0\,\mu(n) = \mu(m)\mu(n)$

Ha $n > 1$, $m > 1$, $(m,n) = 1$ és m, n egyikének sincs prímnégyzet osztója $\Rightarrow m = p_1 p_2 \cdots p_r \wedge n = q_1 q_2 \cdots q_t$ miatt

$$\mu(mn) = (-1)^{r+t} = (-1)^r (-1)^t = \mu(m)\mu(n)$$

Mivel m és n lehetséges értékeire bebizonyítottuk, hogy ha $(m,n) = 1 \Rightarrow \mu(mn) = \mu(m)\mu(n) \Rightarrow \mu$ fgv multiplikatív.

Tétel: A λ fgv totálisan multiplikatív, míg a Λ fgv se nem multiplikatív, se nem additív.

BIZ.: Legyen $m, n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor Ω totálisan additív volta miatt:

$$\lambda(mn) = (-1)^{\Omega(mn)} = (-1)^{\Omega(m)+\Omega(n)} = (-1)^{\Omega(m)}(-1)^{\Omega(n)} = \lambda(m)\lambda(n)$$

Azaz a λ fgv totálisan multiplikatív.

——o——

Λ igazolhatjuk konkrét példával.

$$\Lambda(2 \cdot 3) = 0, \text{ de } \Lambda(2)\Lambda(3) = \log 2 \cdot \log 3 \neq 0$$

Λ nem lehet multiplikatív ($\Lambda(1) = 0 \neq 1$ kizárja ezt.)

Ugyanakkor

$$\Lambda(2) + \Lambda(3) = \log 2 + \log 3 \neq 0 \Rightarrow \text{nem additív.}$$