hatványozás tul ✓ (lásd. TK)

∀ bármely
∀ₘ minden

$\sqrt{\ } \to n = 0$
$n \in \mathbb{Z}^-$ → ha nem (egész) számról beszélünk

pl.: bármilyen fogalom 0. hatványa a fogalom egységeleme (ha volt neki)

VI. tétel

Az invertálhatóság következménye:

$(S, \cdot)$ csop

Tétel: $(S, \cdot)$ félcs-ban a „$\cdot$" invertálhatósága ekvivalens azzal, hogy ∃ neutrális elem, másrészt, hogy ∀ (minden) elemnek ∃ inverze.

(5) B.: (lásd tk!)

Tétel: Az $(S, \cdot)$ csop-ban a „$\cdot$" kancelláris →

B.: indirekt

van olyan egyenlet, aminek 1-nél több megoldása van

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot x_1 = b \\ a \cdot x_2 = b \end{array}\right\} x_1 \neq x_2$$

$a \cdot x_1 = b \quad / \cdot a'$ | $a \cdot x_2 = b \quad / a'$

$(a a') \cdot x_1 = a'b$ | $(a a')\, x_2 = a'b$

$u \cdot x_1 = a'b$ | $u \cdot x_2 = a'b$

⇓ | ⇓

$x_1 = a'b$ | $x_2 = a'b$

$x_1 = x_2$ ↯ ellentmondás ⇒ a tétel igaz!

Következmény: invertálható és kancellatív

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot x = b \\ a \cdot y = b \end{array}\right\}$$ nek pontosan 1-1 megoldása létezik S-ben

A disztributivitás következménye:

$(S, +, \cdot)$ gyűrű

Tétel: $(S, +, \cdot)$ gyűrűben az additív zérus $(=0)$ és a zéruselem azonos.

„0" add. zérus $\forall a \in S' \quad a+0=a$

$$a+0=a$$

$$a\cdot 0+0=a\cdot 0$$

$\underbrace{0 \in S',\ a \in S'}$

$a\cdot 0 \in S'$

de: $a\cdot 0 + a\cdot 0 = a\underbrace{(0+0)}_{0} = a\cdot 0$

$a0+x=a\cdot 0$

$x_1=0$

$x_2=a\cdot 0$

Mivel $(S',+)$ csoport ⇒, hogy $x_1=x_2$, azaz $a0=0$

És bármelyik a-ra igaz ⇒ a : zéruselem

Tétel:

Az előjelszabályok a disztributivitás következményei

a elem add. inverze ; $-a$

ab add. inverze : $-ab$

$a\cdot(-b) = -ab$

$(-a)(-b) = a\cdot b$

B.: lásd TK!

Az előjelszabály minden struktúrában igaz, ahol a disztributivitás igaz volt.

Struktúrák leképezései:

$f: (S, +, \cdot, ?\ldots) \to (S', \circ, *, !, \ldots)$ **homomorfizmus**

$S \to S'$

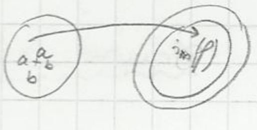
$\forall a, b \in S$ esetén igaz, hogy a, b nek az összegét vesszük, ugyanaz, hogy az „a" és a „b" képét és utána végezzük el a műveletet.

$$f(a+b) = f(a)\circ f(b)$$

$$f(a*b) = f(a) * f(b)$$

↓ S-ben végezhető

↓ S'-ben végezhető } képelemek halmaza

f: 

- ha f még szürjektív : epimorfizmus (szürjektív homomorfizmus)
- ha f még injektív : monomorfizmus (injektív -"-)
- ha f még bijektív : izomorfizmus (bijektív -"-)

Homomorf invariáns tulajdonságok:

Azok, mely a homomorf leképezés során átöröklődik $im(f)$-be.

Tétel (lásd TK!)

legalább az eredeti tul.-ok átöröklődtek, de lehet több is.

pl.: zérusosztó-mentesség öröklődik-e? ált nem

(Csak azok a tulajdonságok örökíthetők, amelyek léteznek. A zérusosztó-mentesség $\Rightarrow$ (nincs zérusosztó) nem örökölhető, de kialakulhat.

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

4-nél le kell vonni a 4-et

$2 \cdot 2 = 0$

Kongruenciareláció:

$(S, +, \cdot \ldots)$ struktúrán ρ reláció kongruenciarel., ha

- ekvivalenciareláció, ha igaz
- $\forall\ a, b, c, d \in S$,

! $a \rho b \wedge c \rho d \Rightarrow a + c \rho b + d$, $a \cdot c \rho b \cdot d$ $\Rightarrow$ a létrejött osztályok kompatibilisek $\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{ab}$

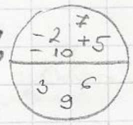
megfelelő oldalakon álló relációban lévő elemeken elvégezhető műveletek után is relációban állnak.

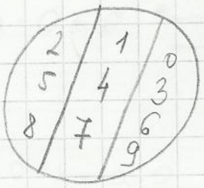
$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $\quad a\,\rho\, b := (3|a \wedge 3|b) \vee (3|a \wedge 3\nmid b)$

$1+2=3$

$1+1=2$

$6+2=8$





Itt megmondható, hogy a végeredmény hová fog tartozni.

$\frac{S}{\rho} \Rightarrow$ faktorhalmaz

$\left(\frac{S}{\rho},+,\cdot\right)$ faktorstruktúra

Az $(S,+,\cdot)$ struktúra homomorf (epimorf) képe az $\left(\frac{S}{\rho},+,\cdot\right)$ struktúra.

Az egész számok gyűrűjének, a racionális számok testének absztraktalgebrai kiépítése. Lásd gyakorlat!

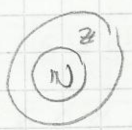
— o —

ism.:

$\mathbb{N}$ $\qquad a+x=b$

$3+x=2$

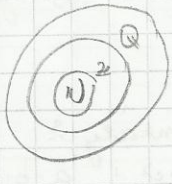
$\Downarrow$



$ax=b$

$3x=2$

$\Downarrow$



$x^2=a$

$x^2=2$

$\Downarrow$

$x^2=a$

$x^2=-1$

— o —

X. tétel

komplex számok:

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$

$(a,b)+(c,d) := (a+c;\ b+d)$

$(a,b)\cdot(c,d) := (a\cdot c - bd;\ bc+ad)$

Tétel: $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ test

Biz.: testaxiómák

⊕ $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}; +)$ kommutatív ✓

asszociativitás ✓

n neutrális elem $(0;0)$ ✓

$(a;b)$ additív inverz $(-a;-b)$ ✓

} modulus

$\cdot$ $(\mathbb{R}\times\mathbb{R};\cdot)$ komm ✓

assoc. ✓

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0,0\};\cdot)$ csoport

egységelem : e $(1;0)$

$(a;b)(1;0) = (\underbrace{a\cdot 1 - b\cdot 0}_{a},\ \underbrace{a\cdot 0 + b\cdot 1}_{b})$

$(a,b)\neq(0;0)$

$(a,b)\cdot(a';b') = (1;0)$

$(aa'-bb',\ ba'+ab') = (1;0)$

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} a\cdot a' - bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{array}\right\}$

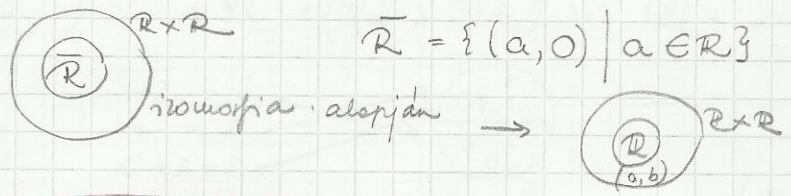
$a' = \dots \qquad b' = \dots$ ✓

⊙ disztributív az ⊕-ra

$(a,b)\cdot((c,d)+(p,q)) = (a,b)\cdot(c,d) + (a,b)(p,q)$

⋮ ✓

A tétel igaz, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ test!



$\bar{R} = \{(a,0) \mid a \in R\}$

Tétel: $(\bar{R},+,\cdot)$ test

$(\bar{R},+,\cdot) \underset{izomorf}{\cong} (R,+,\cdot)$

$f:\bar{R} \to R \ \left((a,0) \mapsto a\right)$ bijektív legyen a leképezés

homomorf legyen az +-és a ·-ra
$\underbrace{\text{nézve}}_{\text{izomorfia}}$

de: $(a,b) = (a,0) + (b,0) \cdot \underbrace{(0,1)}$ ✓ (be kell szorozni)

izomorfizmus alapján

$z \quad \underbrace{a \quad b} \quad i$ (elnevezzük i-nek)

$$\boxed{z = a + b \cdot i}$$ komplex szám algebrai alakja

„i" mi?

$z_1 = a + b \cdot i$

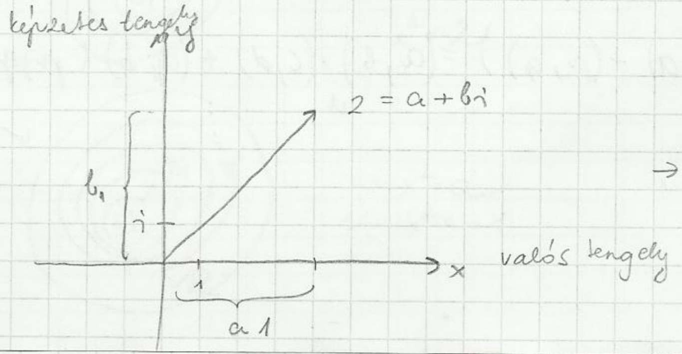
$z_2 = c + d \cdot i$

$z_1 \cdot z_2 = \underbrace{a \cdot c + bd\, i^2} + (\underbrace{ad + dc}_{✓})\, i \quad \to$ felh: $(a,b)\cdot(c,d) := (ac - bd, \underbrace{bc + ad}_{✓})$.

$\Downarrow$

$i^2 = -1$

„i" imaginárius (képzetes) egység



→ ezt a síkot hívják Gauss-sík

ő találta ki a komplex számokat

$z = \underbrace{a}_{\text{valós rész}} + bi$ → képzetes rész

XI. tétel

komplex szám abszolútértéke:

$z = a + bi$

$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$

pl.: $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \underline{1}$

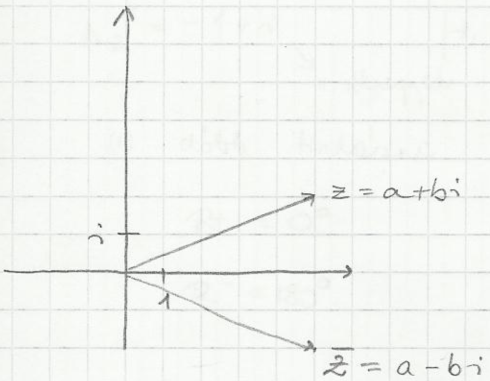
$i = 0 + 1 \cdot i$

|| tulajdonsága:

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad z_2 \neq 0$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \Delta$ egyenlőtlenség ✓



z és $\bar{z}$ egymás konjugáltjai

- $|z| = |\bar{z}|$
- $z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}$
- $z - \bar{z} = 2bi$ tisztaképzetes számok
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

szorzás

pl.: $z_1 = 3 + 4i$

$z_2 = 5 - 7i$

$z_1 \cdot z_2 = \underbrace{15 + 28}_{\text{valós rész}} - i$

osztás

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$

hatványozás:

Pascal Δ:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
0.) & & & & & & 1 & & & & & \\
1.) & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2.) & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3.) & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1b^2$ P. Δ 2. sora

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

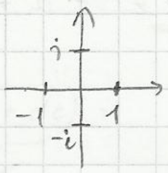
$(a+b)^5 = a^5 + 5 \cdot a^4 b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$$\boxed{\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= -i^2 = 1 \end{aligned}}$$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

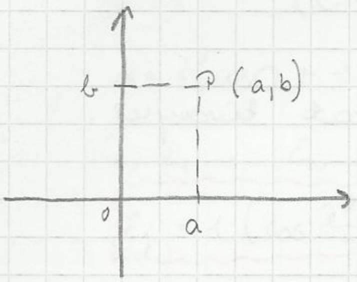
$$i^n = \begin{cases} i & n = 4k+1 \quad k \in \mathbb{N} \\ -1 & n = 4k+2 \\ -i & n = 4k+3 \\ 1 & n = 4k \end{cases}$$

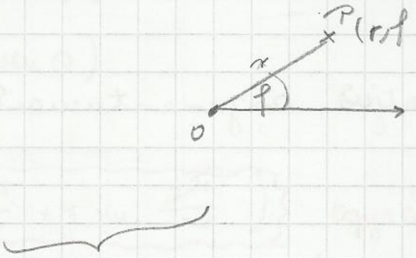


$(a + b \cdot i)^n = A + Bi$

XII tétel

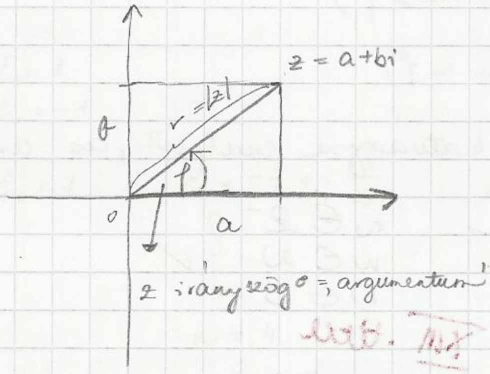
komplex szám trigonometriai alakja:





φ: a félegyenestől mért pozitív szög

$0 \le \varphi < 2\pi$



$\left.\begin{aligned} a &= r\cdot\cos\varphi \\ b &= r\cdot\sin\varphi \end{aligned}\right\} z = a + b\cdot i =$

$= \underline{\underline{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}$

↑ trigonometriai alak.

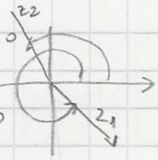
minden számnak van egyértelmű trigonometriai alakja, kivéve a 0.
↓
ott az $|\ | = 0$.

pl.: $(+a; -b)$ ↗ IV. síknegyedben

$z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ $\qquad |z_1| = \sqrt{2+2} = 2$ $\qquad \varphi_1 = 315^\circ$

$z_2 = -1 + i$ $\qquad |z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\qquad \varphi_2 = 135^\circ$

↘ II. síknegyed



(1) döbb tintázni kell a kolletét

$\mathbb{R}^+ = 0^\circ$

$\mathbb{R}^- = 180^\circ$

„·" trigonometriai alakú komplex számokkal:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\,(\underbrace{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + (\underbrace{\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)})\, i)$

$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2 = (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

Úgy szorzunk, hogy az abszolútértékeiket összeszorozzuk, irányszögeiket összeadjuk.

$\frac{z_1}{z_2} = \dots = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$

az abszolútértékeket elosztjuk, argumentumaikat kivonjuk.

MOIVRE - képlet

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Pl: $z^2 = z \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

az abszolútértéket n. hatványra emeljük, az argumentumot n-szeresére növeljük, ha $n \in Z^-$, $n \in N$, $n \in 0$ ✓

XIII. tétel

<u>Gyökvonás</u>:

$\sqrt[n]{z} := w \Leftrightarrow w^n = z$ $\mathbb{R}: \sqrt{4} = 2$

$n \geq 2$

$n \in N$

komplex $\mathbb{C}$ szám: $\sqrt{4} = \pm 2$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$

$w^n = z$

$w^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$ $n\psi = \varphi + k \cdot 2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$\rho^n = r$

$\psi = \frac{\varphi + k2\pi}{n}$

$\rho = \sqrt[n]{r} \in \mathbb{R}_0^+$ $k = 0, 1, 2 \dots n-1$

gyököt vonunk a valós részből, az argumentumát megnöveljük egész $\cdot 2\pi$ és elosztjuk a kitevővel (n).

n db gyöke van 1 komplex számnak.

w_0 ; w_1 ; w_2 … w_{n-1}

$k=0$ $k=1$ … … $k=n-1$

$\Psi = \psi$