2014. VII.

Def.: Dedekind-féle definíció

H halmaz véges, ha egyetlen valódi részhalmazával sem ekvivalens, ellenkező esetben a halmaz végtelen.
↳ ugyanannyi eleme van

Véges halmazok számosságát természetes szám-nak nevezzük.

$\mathbb{N} := \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ természetes számok halmaza

Tétel:
- véges halmaz $\forall$ részhalmaza véges
- $H \wedge K$ legyen véges: $H \cup K$ véges (uniója is véges)
- — " — : $H \times K$ — " —
- — " — : $(H^K := \{f : f : K \to H\})$ véges
  minden olyan benne van, amely a H-t képezi le a H-ba. $H \cup K \neq 0$
  ↓
  függv.-halmaz végzés

Műveletek: $\mathbb{N}$-ben

$\oplus$ $\underbrace{|M| = m; \quad |N| := n}$ $\quad m+n := |M \cup N| \quad M \cap N = \emptyset$

$\odot$ $m \cdot n := |M \times N|$

hatvány $m^n := |M^N|$

! Tulajdonságok: lásd tk!!!

$m \leq n :=$, ha $\exists\, l \in \mathbb{N}$, hogy $m + l = n$

! „$\leq$" tul. lásd tk!!!

- Peano-féle axiomák (5db) ! lásd tk!

- teljes indukció, rekurzív definíció lásd GYAKORLAT-on

{A term. számok legkisebb eleme a 0, továbbá a $\mathbb{N}$ számok nem üres részhalmazának mindig van legkisebb eleme. (Jól rendezett!!!)}

IV. tétel

N véges-e?

$\mathbb{N} := \{0; 1; 2; 3; 4 \dots\}$

$P := \{0; 2; 4; 6 \dots\}$

$P \subset \mathbb{N}$ P valódi részhalmaza $\mathbb{N}$-nek

<u>Áll.:</u> $P \cong \mathbb{N}$ P ekvivalens $\mathbb{N}$-nel

$f : \mathbb{N} \to P \quad (n \mapsto 2n)$

f: szürjektív ✓ (mindegyik felvesz) } bijektív

injektív ✓

Def.: $|\mathbb{N}|$ megszámlálhatóan végtelen - számosság

$\mathbb{N} \cong H$ → az elemei sorbarendezhetők

A

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (síkpontjainak a halmaza)

$\mathbb{N}$: megsz- an végtelen

P

$\mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+ \quad (n \mapsto n+1)$ bijektív

1, „$\subseteq$"

$|H| := |\mathbb{N}|$ megsz- ó végtelen

$H' \subseteq H$

$|H'|$: véges v. megszámlálhatóan végtelen

biz.: $H' \subseteq H$ $\quad H = \{a_1; a_2; a_3 \dots\}$

$H' = \{a_{k_1} \dots a_{n_k}\}$ véges

$H' = \{\dots\}$ megszámlálhatóan végtelen

H végtelen halmaz

$\exists$ olyan H', hogy $H' \subseteq H$ és a $|H'| = |\mathbb{N}|$

a H' számossága = a term. számok számosságával

$a \in H$; $b \in H \setminus \{a\}$; $c \in H \setminus \{a, b\}$

$H' := \{a; b; c \ldots$

megszámlálhatóan végtelen részhalmaz

I. $|H| = |K| = |\mathbb{N}|$ (megszámolhatóan végtelen)

– $|H \cup K| = |\mathbb{N}|$

– $|H \times K| = |\mathbb{N}|$

$H = \{a_1; a_2; a_3 \ldots \}$

$K = \{b_1; b_2; b_3 \ldots \}$

$H \cup K := \{a_1; a_2; b_1; a_3; b_2\}$ ✓

$|H_1| = |H_2| = \ldots = |H_n| = \ldots = |\mathbb{N}|$ megszámolhatóan végtelen számosságú

$|H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_n \ldots| = |\mathbb{N}|$

$H_1 := \{a_{11}; a_{12}; a_{13} \ldots \}$

$H_2 := \{a_{21}; a_{22}; a_{23} \ldots \}$

$H_3 := \{a_{31}; a_{32}; a_{33} \ldots \}$

$H_1 \cup H_2 \cup \ldots := \{a_{11}; a_{12}; a_{21}; a_{13}; a_{22}; a_{31}; \ldots \}$

$H \times K := \{(a_1; b_1); (a_1; b_2); (a_1; b_3) \ldots\} \cup \{(a_2; b_1); (a_2; b_2); (a_2; b_3) \ldots\}$

megszámlálhatóan végtelen sok elemből és sorból álló sorozat, ami sorbarendezhető (az U-val)

$|H \times K| = |\mathbb{N}|$ ✓

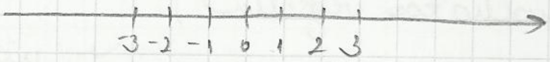
Következmény:

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

$$\mathbb{Z} = \underbrace{\{\dots -2; -1\}}_{\mathbb{Z}^-} \cup \mathbb{N}$$

$$|\mathbb{Z}^-| = |\mathbb{N}|^+$$

$f: \mathbb{Z}^- \to \mathbb{N}^+ \ (-n \to n)$ bijektív



$$Q := \{ \tfrac{p}{q} \mid p; q \in \mathbb{Z}\ ;\ q \neq 0 \}$$

áll: $|Q| = |\mathbb{N}|$

$$Q = Q^+ \{0\} \cup Q^-$$

$$Q^+$$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(0,0); (0;1); (0;2) \dots\}$$

$\cup$

$\{(1;0)$ $(1;1);\ (1;2) \dots\}$

$\cup$:

$\Downarrow$

$$|Q^+| = |\mathbb{N}|$$

Q^* irracionális szám

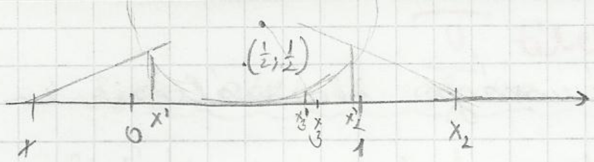
$\mathbb{R}$ (valós számok) $= Q^+ \cup \{0\} \cup Q^*$

Tétel:
A valós számok halmaza nem megszámlálhatóan végtelen.

$$|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$$

Segédtétel: $H = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 1\}$ → 0–1 nyílt intervallum

$$|\mathbb{R}| = |H|$$



$f: \mathbb{R} \to H \; (x \mapsto x_1')$ bijektív : mindegyikhez rendelhető elem

$\forall x \in \underbrace{(0;1)}_{H}$

! Végtelen mértani sorozat !

$x = 0{,}a_1 a_2 a_3 \dots a_i \dots$

$0 \le a_i \le 9$

- $\exists i$, hogy $a_i \neq 0$

$0{,}5 = \cancel{0{,}4\dot{9}}$

- végtelen sok nem 9-es is van

Cantor-féle átlós módszer:

ind: H elemei sorozatba rendezhetők.

$x_1 = 0{,}a_{11} a_{12} a_{13} \dots$

$x_2 = 0{,}a_{21} a_{22} a_{23} \dots$

$x_3 = 0{,}a_{31} a_{32} a_{33} \dots$

nem rendezhetők sorozatba

áll: $x := 0{,}b_1 b_2 b_3 \dots$

$b_i := \begin{cases} 1, & \text{ha } a_{ii} = 1 \\ 2, & \text{ha } a_{ii} = 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x \neq x_1, \text{ mert } b_1 = a_{11} \\ x \neq x_2 \text{ ; mert } b_2 \neq a_{22} \end{array}\right\} \Rightarrow x$ nincs a sorozatban $\lightning$ ell.

Def.: $|\mathbb{R}|$ számosságát kontinuum-végtelennek nevezzük

köv.: ha $|\mathbb{Q}^*| = |\mathbb{N}|$

$\Downarrow$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q}^* \cup \mathbb{Q}$

$|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$

ellentmondás

Tétel: Végtelen halmaz számossága nem változik, ha egy megszámlálhatóan végtelen halmazzal bővítjük. $\Rightarrow$

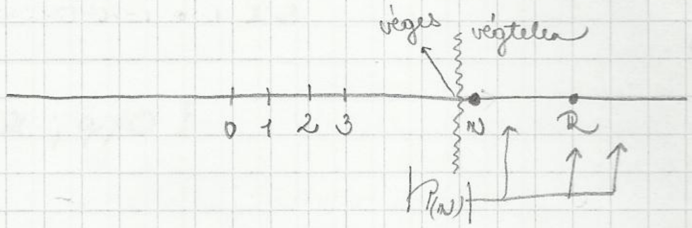
$\Rightarrow Q^* \cup Q = \mathbb{R} \Rightarrow |\mathbb{R}| = |Q^*|$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sík pontjai

$\Downarrow$

1 kis intervallumon annyi pont van, mint az egész síkon

Def.: $|H| < |K|$, ha $\exists$ olyan $K' \subset K$, hogy $|H| = |K'|$, de $|H| \neq |K|$



$|A| = n$

$|P(A)| = 2^n$ } ált-ban is igaz, hogy $|H|$ halmaz számossága $<$, mint $|P(H)|$

Nincs végtelen, mert a hatványhalmaza mindennél nagyobb.

kontinuum hipotézis: Az a hipotézis, amit nem sikerült bebizonyítani. $\aleph_1 : |P(N)|$

Nem lehet olyan kz-t definiálni, amely eldöntené ezt a kérdést.

V. tétel

Az absztrakt algebra alapfogalmai

$S \neq \emptyset$

$f_1 : S \to S$ (egyváltozós művelet) → a halmaz önmagába való leképezése

$f_2 : S \times S \to S$ $((a,b) \mapsto c)$ kétváltozós művelet ⟹ bináris művelet.

$f_3 : S \times S \times S \to S$ $(a,b,c) \mapsto d$ háromváltozós művelet

jelölés: $f(a,b) = c$ helyett: $a+b=c$ $(S, +, \cdot, ?)$ algebrai struktúra
ahány művelet van benne, annyi változós struktúra.

$S := \{a, b, c\}$ Cayley-t

$\cdot$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	a
c	a	a	b

$a \cdot b$
$a \cdot a$

Mindig az eredeti halmazba képezzük vissza. Pl.: d itt nem értelmezhető

$(S, \cdot)$ struktúrában a „·" művelet:

komm., asszociatív, idempotens, invertálható, kancellatív

$(\forall a,b \in S \quad a \cdot b = b \cdot a)$

$\forall a \in S \quad a \cdot a = a$

$\forall a,b \in S \quad (a \cdot b) \cdot c = abc$

$\forall a,b \in S$ az $a \cdot x = b$ és $y \cdot a = b$ megoldhatók S-ben.

$\forall a,b \in S$ az $a \cdot x = b$ és $y \cdot a = b$ egyenleteknek legfeljebb 1-1 mo-a létezik S-ben
nem lehet 1-nél több megoldása

$(\mathbb{N}, +)$

„+" komm, ass., ~~idemp.~~ $(2+2 \neq 2)$, ~~invert.~~ kanc.

$a, b \in \mathbb{N}$
$a + x = b$
$4 + x = 2$
$\nexists x \in \mathbb{N}$

$(\mathbb{N}, \cdot)$ komm, ass, ~~idemp.~~ $(2 \cdot 2 \neq 2)$ ~~invert~~ $(2 \cdot x \neq 3)$ $x \notin \mathbb{N}$ ~~kanc~~

$0 \cdot x = 3$ – nem megoldható
$\boxed{0 \cdot x = 0}$

$(S; +, \cdot)$ – disztributivitás $\quad (b+c)a = ba + ca$

$a(b+c) = ab + ac \quad$ a „$\cdot$" disztributív az „+"-ra

$\forall a, b, c \in S$

– adszorbciós tulajdonság

$\forall a, b \in S$

$a(a+b) = a$

$(a+b)a = a \quad$ a „$\cdot$" művelete adszorbtív az „+"-ra

$(S, \cdot)$ struktúra kitüntetett elemei:

$u \in S$ neutrális (semleges) eleme az $(S, \cdot)$ struktúrának, ha $\forall a \in S$ esetén $\underline{a \cdot u = u \cdot a = a}$

$z \in S$ zéruselem, ha $\forall a \in S$ esetén $a \cdot z = z \cdot a = z$
(ha csak $a \cdot z = a$ teljesül, akkor ez jobboldali zéruselem)

Tétel: Az $(S, \cdot)$ struktúrában legfeljebb 1 neutrális elem $\exists$ (létezik)
Az $(S, \cdot)$ –"– zéruselem $\exists$.

Biz.: $u_1 \neq u_2$ neutrális elem

$u_1: \forall u_1 \in S$ esetén $a \cdot u_1 = u_1 \cdot a = a \quad$ pl: $a = u_2$ →
$u_2: \forall u_2 \in S$ esetén $a \cdot u_2 = u_2 \cdot a = a \quad$ pl: $a = u_1$ →

→ $u_2 u_1 = u_1 u_2 = u_2$
→ $u_1 u_2 = u_2 u_1 = u_1$
$\Big\}\ u_1 = u_2$ $\quad$ ↯ ellentmondás, a tétel igaz!

$(S, \cdot)$

szorzás: u: neutrális elem helyett az $e\ (=1)$ jelölést használjuk.

$\underline{\text{multiplikatív egységelem}}$

$(S, +)$
$\downarrow$
összeadás: u neutrális elem helyett: 0 jelölést használjuk.
$\downarrow$
additív zérus

zérusosztó: $(S, \cdot)$ struktúrának z zéruseleme

$a, b \in S \setminus \{z\}$ → zérustól különböző eleme

ha $a \cdot b = b \cdot a = z$, akkor a és b egymás zérusosztói

Ha nincs a struktúrában zérusosztó, akkor az zérusosztómentes.

inverz párok: $(S, \cdot)$ -nak u neutrális eleme

$a, a' \in S$

ha $a \cdot a' = a' \cdot a = u$, akkor a és a' egymás inverze.

$(S, +)$ $u (= 0)$ neutrális elem
$\downarrow$
összeadás $\quad a + a' = a' + a = 0$

$-a$ (→ ezt írjuk helyette)
↳ az „a" additív inverze

$(S, \cdot)$ $u = e (= 1)$ egységelem
$\downarrow$
szorzás $\quad a \cdot a' = a' \cdot a = e$

a^{-1} → az „a" multiplikatív inverze

Nevezetes struktúratípusok:

a, Egyműveletes: 1, félcsoport: ha a „$\cdot$" asszociatív („$\cdot$" = művelet)
$(S, \cdot)$ struktúra 2, csoport: ha a „$\cdot$" asz. és invertálható
3, félháló: ha a „$\cdot$" asz., kommutatív és idempotens

b, Kétműveletes: 1, gyűrű: ha $(S, +)$ komm. csoport, $(S, \cdot)$ félcsoport és „$\cdot$" disztrib. az „+"-ra
modulus (Abel-f. csoport)
$(S, +, \cdot)$ 2, test: speciális gyűrű, ha $|S| \geq 2$; $(S, +, \cdot)$ gyűrű, „$\cdot$" komm, $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ csoport
S számossága $\quad$ S-ből kivesszük a 0-t.
3, háló: ha $(S, +)$ és $(S, \cdot)$ félháló és a műveletek kölcsönösen abszortívak

Speciális gyűrű az integritás tartomány

$(S,+,\cdot)$ gyűrű és egységelemes, kommutatív, zérusosztó-mentes

Biz.: TK-ben is!!!

Az asszociativitás következményei:

Adott egy $(S,\cdot)$ félcsoport

Tétel: $(S,\cdot)$-ban véges sok elemen végrehajtott művelet eredménye független a zárójelezéstől.

B.: Teljes indukció ✓

Tétel: ha $(S,\cdot)$ félcs.-ban a művelet kommutatív, a tényezők sorrendjétől sem függ.

B.: Bármilyen sorrend előállítható véges sok szomszédos elempár cseréjével.

Tétel: $(S,\cdot)$ félcs.-ban $\forall$ elemnek legfeljebb egy inverze van.

B.: indirekt ✓

Tétel: $(S,\cdot)$ félcs.-ban a-nak $\exists$ inverze: a'
b-nek $\exists$ -"- : b' $\Rightarrow$ $a\cdot b$-nek is $\exists$ inverze: $b'\cdot a'$

B.: $$(a\cdot b)(b'\cdot a') = a\cdot\underbrace{(b\cdot b')}_{u}\cdot a' = a\cdot u\cdot a' = \underbrace{(a\cdot u)}_{a}\cdot a' = a\cdot a' = \underline{\underline{u}}$$
$$(b'\cdot a')(a\cdot b) =$$

Hatványozás $(S,\cdot)$ félcs.-ban

↳ $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$: produktum

(Hatványozás $(S,+)$ félcs-ban $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1+a_2+\ldots a_n$ $\rightarrow$ $n\cdot a := \sum_{i=1}^{n} a$)

ha $\underbrace{a_1 = a_2 = \ldots = a_n}_{\text{„}a\text{"}}$

$a^n := \prod_{i=1}^{n} a$ (definíció szerint)