könyvek: Kiss Emil... Fáncs: algebra és számelmélet (zöld) 1/3-a kell

Kiss Péter – Mátyás F.: A számelmélet elemei

— o —

Logikai alapismeretek
Halmazelméleti –"– } TK

alapfogalmak, részhalmazjelölés, műveletek

I. tétel

Descartes-féle szorzat:

Legyen H és K két adott halmaz

Def: $H \times K := \{(a,b) \mid a \in H;\ b \in K\}$

pl.: $H := \{1;2\}$

$K := \{a;b;c\}$

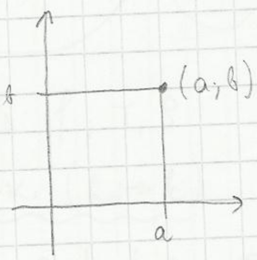
$H \times K := \{(1;a);(1,b);(1,c)(2;a)\}$ ... stb

$H \times K \neq K \times H$

Nem kommutatív

Elempár: Olyan halmaz, melynek egyik eleme az A halmaz, a másik pedig B.

/: $(a;b) = \{\{a\};\{a;b\}\}$ /



pl.: a sík pontjainak halmaza

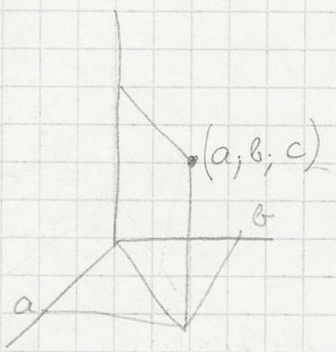
Binér -, Egyváltozós
Relációk:

Def: Legyen $\varrho \subseteq H \times K$ részhalmaza ϱ -t relációnak nevezzük

pl.: $\varrho_1 := \{(1;a); (1;c); (2;b), (2;c)\}$

jelölés: $1 \varrho a$ $(1;a) \in \varrho$
1 relációban van a-val

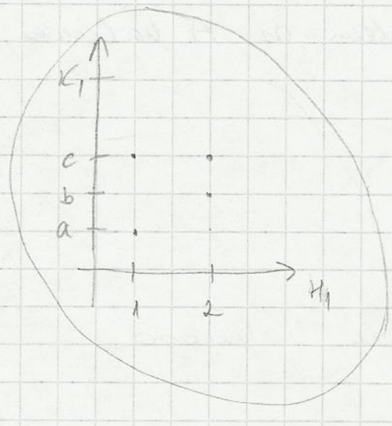
$2 \not\varrho a$ $(2;a) \notin \varrho$



$(a;b;c) \in A \times B \times C$

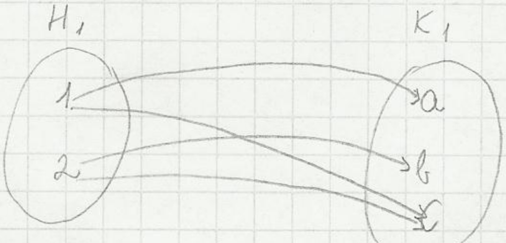
$\varrho_2 := \{(1,b); (2,1)\}$

Részhalmaz: 2^n, ha a halmaz n db-ból áll.



$\rightarrow \varrho_1$ részhalmaz

Nyíldiagramm:



ρ

D_ρ - reláció ért. tart.

R_ρ - reláció értékkészlete

$\rho \subseteq H \times K$

$D_\rho := \{h \mid h \in H, \text{hogy } \underset{\text{létezik}}{\exists} k \in K, \text{ amelyre } (h;k) \in \rho\}$

Minden olyan h elem, amely H-ból kerül ki és igaz, hogy...

$R_\rho := \{k \mid k \in K \ \exists h \in H, (h;k) \in \rho\}$

Nevezetes relációk:

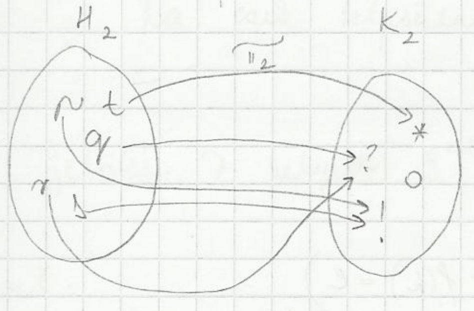
1, Leképezés:

Def.: $\rho \subseteq H \times K$: reláció a H-t K-ba képező leképezésnek nevezzük,

ha - $D_\rho = H$ (mindet kell venni)

- $\forall$ (bármely) H-beli h elemhez pontosan 1 K-beli k elem létezik, hogy igaz legyen, hogy $H \rho K$

pl.: ρ_1 nem leképezés $1 \rho a$ és $1 \rho c$



$D_{\pi_2} = H_2$ ✓

$R_{\pi_2} := \{*, !, ?\}$

jelölés: f, T, S...

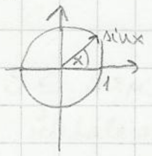
$\pi : H \to K \ (h \mapsto k)$

a h-hoz van rendelve a k elem

ősélem — képelem

$\pi(h) = k$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto \sin x)$



$\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ~~$(x \mapsto tg\, x)$~~ nem létezik, mert van olyan $x \in \mathbb{R}$, amihez nincs $tg\, x$

$\tau : \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2(k+1)\}$

$(k \in \mathbb{Z})$

$\to \mathbb{R}$ $(x \mapsto tg\, x)$

Minden elemhez kell rendelni 1 elemet !!!

Speciális leképezés

a; $f \subseteq H \times K$, f H-t a K-ba képező leképezés (függvény)

f: szürjektív $R_f = K$ (ha minden elemhez fut leképezés)

b; f: injektív ha különböző elemnek különböző a képe
különböző elemből különbözőbe megy

c; f: bijektív ha szürjektív és injektív

0; pl.: $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto x^2)$ nem szürjektív
nem injektív

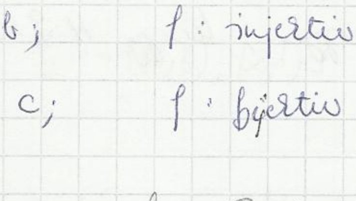
$f_4 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $(x \mapsto x^2)$ szürj, inj. $\to$ bijektív

Leképezések szorzása:

$f : H \to K$

$\tau : K \to L$

$\tau \cdot f := H \to L$ $(h \to f(h) = k \to \tau f(k) = l)$



nem lehet összefűzni őket

$\tau = \psi$ (pszi) $\quad \mathcal{T}$ tau tul.: – $f\cdot\tau \neq \tau\cdot f$ nem kommutatív

– asszociatív $f: H\to K$; $\tau: K\to L$; $T: L\to L$

$$(T\cdot\tau)\cdot f = \underset{\text{tau}}{T}\cdot(\tau\cdot f)$$ → ez igaz, ugyanaz!!!

$\Theta\ h\in H$: $h\mapsto f(h)=k \quad (T\cdot\tau)(k) = \underbrace{T(\tau(k))}_{} = T(l) = t$

τ mit csinál a k-val és utána jön a T

$f: H\to H$ (transzformációk)

bijektív transzformáció: A halmazt önmagába képezi le kölcsönösen egyértelmű módon = permutáció

$\varepsilon_H : H\to H \ (h\mapsto h)$ identikus leképezés: minden elemhez önmagát rendeli

$\varepsilon_K : K\to K \ (k\mapsto k)$

Annyi identikus leképezés van, ahány halmaz.

$f: H\mapsto K \qquad \tau: K\to H$

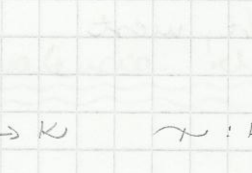
$$\left.\begin{aligned} f\cdot\tau &= \varepsilon_K \\ \tau\cdot f &= \varepsilon_H \end{aligned}\right\}\ \text{identikus leképezés}$$

↓

ha ezek teljesülnek, akkor f és τ inverz leképezések.

jelölés: τ helyett f^{-1}

pl.:



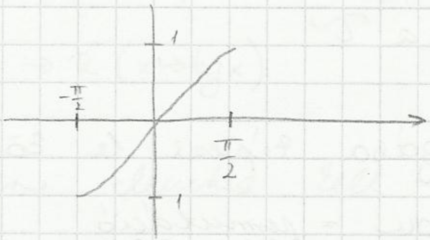
$x\in\mathbb{R}$

$x\in\mathbb{R}^+$

Tétel: $f: H \to K$ -nak akkor és csak akkor létezik inverze, ha f bijektív.

TK.

A sin függvénynek nincs inverze, mert a $\sin x = \frac{1}{2}$ rengeteg x-re igaz. Mikor visszakeressük, akkor a $\sin x$ fgv-nek csak 1 ágát vizsgáljuk, különben az értelmezési tartománya.



Tétel: Bijektív leképezések szorzata is bijektív

II. tétel

Halmazon értelmezhető relációk.

$\boxed{\rho \subseteq H \times H}$ Azért hívják halmazon ért., mert a K helyett H áll.

ρ: - reflexív, ha $\forall h \in H$ $h \rho h$

- szimmetrikus, ha $\forall h_1, h_2 \in H$ $h_1 \rho h_2 \to h_2 \rho h_1$
- antiszimmetrikus, ha $\forall h_1 ; h_2 \in H$ $(h_1 \rho h_2$ és $h_2 \rho h_1) \Rightarrow h_1 = h_2$
- tranzitív, $\forall h_1, h_2, h_3 \in H$ $h_1 \rho h_2$ és $h_2 \rho h_3 \to h_1 \rho h_3$

pl. Rendezési reláció, ha

- reflexív
- antiszimm.
- tranzitív

ha ezek teljesülnek, akkor az rendezési reláció.

pl.: $H \neq \emptyset$

$P(H)$, „$\subseteq$" tartalmazási reláció

↓

1 példa a rendezési relációra

ϱ rendezési reláció helyett: $\leq$

$a \varrho b$ helyett: $a \leq b$

$H, \leq$ értelmezve van a halmazon egy rendezési reláció

↳ H részben rendezett

- nem feltétlenül lehet megmondani, hogy melyik követi a másikat

- ha $\forall a, b \in H$ esetén igaz, hogy $a \leq b$ (a megelőzi b-t) $\vee$ $b \leq a$; akkor $(H, \leq)$ rendezett ⇒ teljesen rendezett, lineárisan rendezett.

- ha az $a \in H$ esetén $\forall h \in H$

$a \leq h$ (a minden elemtől kisebb) ⇒ ilyenkor „a" a legkisebb elem

ϱ ekvivalencia reláció:

- reflexivitás
- szimmetria
- tranzitivitás

szerepe van az absztrakt matematika kialakításában

- $H \neq \emptyset$ osztályozása: 

A halmaz partikus részhalmazokra bontása

Olyan részhalmazokra való bontása, ahol - egyetlen részhalmaz sem üres; - a részhalmazok uniója $= H$; - a részhalmazok páronként idegenek (diszjunktak).

Tétel: $H \neq \emptyset$ H-n értelmezett ekvivalencia reláció H egy osztályozását generálja és viszont.

Biz:

H-n adott a ρ ekvivalencia reláció

$H = \{a; b; c \dots\}$

$C_a := \{h / h \in H;\ a \rho h\}$ definiálunk egy részhalmazt

$C_b := \{h / h \in H;\ a \rho b\}$

1, $C_a ; C_b \dots \subseteq H$

$C_a \neq \emptyset$, mert $a \in C_a$ (legalább az „a" elem benne van.

A ρ reflexív volt => emiatt legalább önmagával relációban van

2,

$C_a \cup C_b \cup C_c \dots = H$

Legalább 1x azok az elemek benne vannak, amelyek az indexben vannak

3, indirekt $C_a \cap C_b \neq \emptyset$

Tfh, van olyan $a; b \in H$, ahol $\underbrace{C_a \cap C_b = \emptyset}_{\text{létezik olyan } h \in H \text{, ahol}} \Rightarrow C_a = C_b$

$h \in C_a$ és $h \in C_b$

$\underbrace{a \rho h \qquad b \rho h}_{a \rho b}$, de $h \rho b$

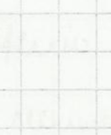
$\forall h \in C_a$

$a \rho h \wedge a \rho b$

$h \rho a \wedge a \rho b \rightarrow h \rho b = b \rho h \Rightarrow h \in C_b$

$C_a \subseteq C_b$

VISZONT: Adott H-nak 1 osztályozása



$a \rho b$: akkor és csak akkor, ha a és b ugyanannak az osztálynak az elemc

Tfh: ρ ekv. reláció

– reflexív

– szimmetrikus: a ua az osztályban van, mint b, akkor fordítva is

– tranzitív: ha a és b egy osztályban volt, és b és c is, akkor a és c is egy osztályban lesz

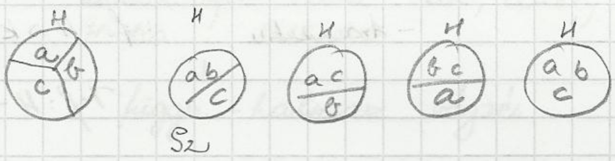
Feladat

pl.: $H = \{a; b; c\}$

Hány ekvivalenciarelációt értelmezhető H-n?

összes reláció száma: $H \times X = 9$ elem $\to 2^9$ részhalmaz $\Rightarrow 512$ reláció

H osztályozásai:



ρ_2

pl.: $\rho_2 = \{(c;c); (a;b); (a;a); (b;b)\ (b;a)\}$

– ekvivalenciaosztály

jelölés: $\bar{a} := \{h \mid h \in H;\ a \rho h\}$

a osztály (régen: C_a)

osztályokból is lehet halmazt csinálni

$H/\rho := \{\bar{a}; \bar{b}; \bar{c}; \dots\}$

az ekvivalencia osztályok halmaza: $\boxed{\text{faktorhalmaz}}$ → olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok.

$H/\rho = \{\bar{c}; \bar{a}\}$

$\bar{c} = \{c\}$

$\bar{a} = \{a; b\}$

→ az $\bar{a}$ osztálynak a reprezentánsa

III. tétel

Halmazok számossága: $\mathcal{A}$ jelölje a halmazok egy elég bő osztályát.

$\mathcal{A}$-n értelmezzünk egy ϱ relációt: $\forall H, K \in \mathcal{A}$

$H \varrho K :=$ van olyan f leképezés, amely a H-t a K-ba képezi bijektív módon.

$H \varrho K := \exists f: H \to K$ bij

Áll: ϱ ekvivalencia reláció: – reflexív (pl: $\varepsilon_H: H \to H$ $(h \mapsto)$ bij (h-t hozzárendelte önmagához))

– szimmetrikus: $f: H \to K$ bij $\to f^{-1}: K \to H$ bij

– tranzitív: $f: H \to K$ bij, $\lambda: K \to L$ bij $\to$ $\lambda f: H \to L$ bij

Következmény:

azért kerültek be az ekvivalencia osztályába, mert van közöttük bijektív leképezés

Közös az összes halmazban, hogy ekvivalens

$H \varrho K$ helyett: $H \cong K$

↳ jelentés: H ekvivalens K-val, $\boxed{\text{de}}$ nem egyenlők

(Nem egyenlők, csak ugyanannyi eleme van, mert van köztük bijekció)

$|H|$ (H halmaz számossága) $:= \{X \mid X \in \mathcal{A} \wedge X \cong H\}$

↓ az a közös tulajdonsága, hogy ugyanannyi elemük van.

pl.: $|\emptyset| := 0$ → az üreshalmaz elemeinek a száma 0.

$|\{\emptyset\}| := |\{a\}| = |\{!\}| := 1$

$|\{a;b\}| := 2$ az összes olyan halmaz, amelynek annyi eleme van, mint ennek, az a kettő.