$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $f^\circ = n \geq 1$

Tétel: $\mathbb{Q}[x]$-ben tetszőlegesen magas fokszámú prímpolinomok (irreducibilis polinomok) léteznek.

pl.: $f(x) = x^n - 2$ $\quad \forall\, n \geq 1$-re irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben

Biz.: indirekt. lásd TK!!!

XXX

HORNER-séma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

x helyett írjunk α-t

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 =$$

$$= f(\alpha) = \alpha \left(a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \dots + a_2 \alpha + a_1 \right) + a_0 =$$

$$= \left(\left(a_n \alpha^{n-2} + a_{n-1} \alpha^{n-3} + \dots + a_2 \right) \alpha + a_1 \right) \alpha + a_0$$

⋮ ✓

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_0
α	a_n	$a_n\alpha + a_{n-1}$	$(a_n\alpha + a_{n-1})\alpha + a_{n-2}$		$f(\alpha)$

$\cdot\alpha \nearrow \quad \downarrow +$

pl.: $x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2x - 7$

	1	4	0	3	2	-7
$\alpha = -1$	1	3	-3	6	-4	-3

→ a „-1" nem gyök

de: $x^5+4x^4+3x^2+2x-7=(x+1)\cdot$

$\cdot(x^4+3x^3-3x^2+6x-4)-3$

2002. XII. 11.

Másodfokú egyenletek:

1.) $ax^2+bx+c=0$ $\quad a\neq 0$

$a,b,c\in\mathbb{C}$

biz TK! gimiben

$$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ $\qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

$D=b^2-4ac$

$ax^2+bx+c=0$ $\quad a\neq 0$ $\quad a,b,c\in\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ létezik többszörös gyöke $(x_1=x_2)$, ha a $D=0$. (Ekkor: $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

$ax^2+bx+c=0$; $a\neq 0$ $\quad a,b,c,\in\mathbb{R}$

$D=b^2-4ac$

- $D=0$ $\quad (x_1=x_2=-\frac{b}{2a}\in\mathbb{R})$
- $D>0$ $\Rightarrow \pm\sqrt{b^2-4ac}\in\mathbb{R}\Rightarrow x_1\neq x_2$; $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2\in\mathbb{R}$
- $D<0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{i^2\underbrace{(4ac-b^2)}_{>0}}\Rightarrow \pm i\underbrace{\sqrt{4ac-b^2}}_{\in\mathbb{R}}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$x_1\neq x_2$

$x_1,x_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

XXXIII

II.) Harmadfokú egyenlet:

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ $\quad /:a$ $\quad a\neq 0$ $\quad a,b,c,d\in\mathbb{C}$

$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$

$x:=y-\frac{b}{3a}$

$\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{b}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{c}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}=0$

$$y^3+\underbrace{\left(-\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\right)}_{0}y^2+\underbrace{(\ldots)}_{:=p}y+\underbrace{(\ldots)}_{q}=0$$

$$y^3+py+q=0$$

Elegendő az $x^3+px+q=0$ $(p,q\in\mathbb{C})$ típusú egyenletekre megoldóképletet levezetni

$1: p=0 \Rightarrow x^3=-q$

$$x_{1,2,3}=\sqrt[3]{-q} \checkmark$$

$2: q=0 \Rightarrow x^3+px=0$

$$x(x^2+p)=0$$

$$x_1=0 \quad x_{2,3}=\pm\sqrt{-p}$$

$3: pq\neq 0$

Algebra - alaptétele miatt $\exists\, z\in\mathbb{C}$, hogy $z^3+pz+q=0$

Keressük z-t $z=u+v$ alakban, ahol $u,v\in\mathbb{C}$

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$

$$u^3+3u^2v+3v^2u+v^3+p(u+v)+q=0$$

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0$$

$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0$$

Legyen $3uv=-p$, mert $3uv+p=0$ $\Rightarrow$ ekkor a lehető legegyszerűbb! Ilyenkor nem következik. A lehetőség annak, hogy a z-t egy „szabadsági joggal” rubáztuk fel.

$$uv=-\frac{p}{3} \quad ()^3$$

$$u^3+v^3=-q$$

$$u^3\cdot v^3=\left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

Írjuk fel azt a (másodfokú) $t^2+k\cdot t+l=0$ egyenletet, amelynek $t_{1,2}=u^3, v^3$ a gyökei.

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

gyökök és együtthatók összefüggése alapján

$$t_{1,2} = u^3, v^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$u_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad ; \quad v_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$\boxed{z = u_{1,2,3} + v_{1,2,3}} \Rightarrow z_{1,2,\dots 9}$$

DE: $3u_i \cdot v_i = -p$

kiszámítjuk: u_1, u_2, u_3

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} \; ; \; v_2 = \frac{-p}{3u_2} \; ; \; v_3 = \frac{-p}{3u_3}$$

$$z = \underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}_{u_i} + \underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^3 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}_{v_i}$$

→ 3-adfokú egyenlet megoldóképlete

$$u_i \cdot v_i = -\frac{p}{3}$$

Cardano-féle formula **XXXIV**

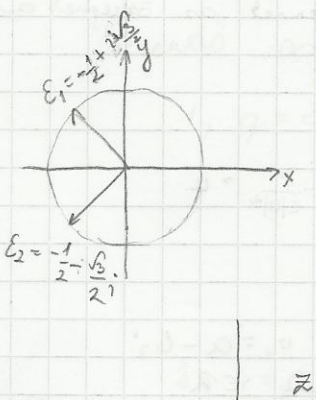
~o~

Legyen

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{ egy konkrét érték} \qquad v_1 = -\frac{p}{3u_1}$$

$$u_2 = u_1 \cdot \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{p}{3u_2} = -\frac{p}{3u_1\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2} = \frac{-p}{3u_1} \cdot \varepsilon = v_1 \cdot \varepsilon_2$$

$$u_3 = u_2 \cdot \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad v_3 = \dots = v_1 \cdot \varepsilon_1$$



$$z_1 = u_1 + v_1$$

$$z_2 = u_2 + v_2 = \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\varepsilon_1} u_1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\varepsilon_2} \cdot v_1 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{\sqrt{3}}{2} i (u_1 - v_1)$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{\sqrt{3}}{2} i (u_1 - v_1)$$

A fenti z_1, z_2, z_3 valóban megoldás

$$z_1+z_2+z_3 = \ldots = 0 \checkmark$$

$$z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_3 = \ldots = p \checkmark$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \ldots = -q \checkmark$$

Az összeg a négyzetes tag együtthatója

A 3-adfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$x^3+px+q=0$$

$$D := -108\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]$$

Tétel: $x^3+px+q=0 \Leftrightarrow \exists$ egyenlő gyöke, ha $D=0$.

Biz. lásd később! vagy TK!

$$x^3+px+q=0, \quad pq\neq 0; \ p,q\in\mathbb{R}$$

$D=0$

$u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\in\mathbb{R}$

$v_1=-\frac{p}{3u_1}\in\mathbb{R}$

$z_1=u_1+v_1\in\mathbb{R}$

$z_2=-u_1\in\mathbb{R}$

$z_3=-u_1\in\mathbb{R}$

$D<0$

$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$

$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\in\mathbb{R}$

$u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\ }}\in\mathbb{R}$

$v_1=-\frac{p}{3u_1}\in\mathbb{R}$

$z_1=u_1+v_1\in\mathbb{R}$

$z_2= \ \in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$z_3= \ \in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$z_2=\bar{z}_3$

$D>0$

$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0 \Rightarrow p<0$

$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=-\frac{q}{2}+i\underbrace{\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}_{>0}$

$|u^3|=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}=\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$

(↳ komplex szám abszolútértéke: képzetes rész négyzete + valós rész négyzet és ennek az összegnek a gyöke.)

$|u|=\sqrt{-\frac{p}{3}}$

$v=-\frac{p}{3u}\cdot\frac{\bar{u}}{\bar{u}}=-\frac{p}{3|u|^2}\cdot\bar{u}$

$v=\bar{u}$

$u=a+bi \qquad v_1=a-bi$

$z_1=u_1+v_1=2a\in\mathbb{R}$

$z_2=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1)=-a-b\sqrt{3}\in\mathbb{R}$

$z_3=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1)=-a+b\sqrt{3}\in\mathbb{R}$

$x_1\neq x_2 \quad x_1\neq x_3 \quad x_2\neq x_3$

Amennyiben a $D>0$, 3 db. különböző valós gyöke van a harmadfokú egyenletnek.

Casus irreducibilis: nem visszavezethető eset

(Nem oldható meg úgy az egyenlet a visszavezetéssel a valós számok halmazán, a komplex számok kiiktatása nélkül)

Lehet olyan megoldást konstruálni, de az nem algebrai úton történik. (amiben nincs komplex szám)

Casus irreducibilis esetében trigonometriai megoldás adható. (Lásd TK!)

KELL!!!

XXXV

III., Negyedfokú egyenlet:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \qquad a\neq 0 \qquad a,b,c,d,e \in \mathbb{C}$$

$$x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}=0$$

$$x := y-\frac{b}{4a}$$

$$y^4+\underbrace{(\dots)}_{0}y^3+\underbrace{(\dots)}_{p}y^2+\underbrace{(\dots)}_{q}y+\underbrace{(\dots)}_{r}=0$$

$$\boxed{y^4+py^2+qy+r=0}$$

Elegendő az $x^4+px^2+qx+r=0$ egyenlet megoldásával foglalkozni

1, $q=0$ $\quad x^4+px^2+r=0$

$$t=x^2 \rightarrow t^2+pt+r=0 \quad t_1 \to x_1, x_2 \quad t_2 \to x_3, x_4$$

✓

2, $r=0$ $\quad x(x^3+px+q)=0$

$$x_4=0 \qquad x_1, x_2, x_3$$

3, $q \neq 0$

$$x^4+px^2+qx+r=\underbrace{(x^2+ax+b)}_{=0}\underbrace{(x^2-ax+c)}_{=0}=0$$

x^4: $1=1$ ✓

x^3: $0=0$ ✓

x^2: $p=b+c-a^2$

x: $q=ac-ba$

x^0: $r=b\cdot c$

$$\left.\begin{aligned} a^2+p &= b+c \\ \frac{q}{a} &= -b+c \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &+ \rightarrow c=\frac{1}{2}\left(p+\frac{q}{a}+a^2\right) \\ &- \rightarrow b=\frac{1}{2}\left(p-\frac{q}{a}+a^2\right) \end{aligned}$$

$$r=\frac{1}{2}\left(a^2+p+\frac{q}{a}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(a^2+p-\frac{q}{a}\right)$$

$$\vdots$$

$$r=a^6+(\dots)a^4+(\dots)a^2+(\dots)=0$$

$$t=a^2$$

REZOLVENS egyenlet $\leftarrow$ $\underbrace{r=t^3+(\dots)t^2+(\dots)t+(\dots)=0}$

$t_1,\ t_2,\ t_3$

$a_{1_2}\ a_{1_2}\quad a_{2_1}\ a_{2_2}\quad a_{3_1}\ a_{3_2}$

előjelben térnek el $\quad$ előjel $\quad$ előjel

Elegendő 3-at kiszámítani:

$a_{1_1},\ \cancel{a_{2_1}},\ \cancel{a_{3_1}}$

$b_1\ c_1$

$$x^4+px^2+qx+r=\underbrace{(x-x_1)(x-x_2)}\underbrace{(x-x_3)(x-x_4)}$$

Egy a értéket kell kiszámolni, meghatározni a hozzá tartozó b-t és c-t. Utána két másodfokú egyenlet segítségével meghatározható a másik két gyök.

Elmélet

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ kiépítése

VIII

$(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\oplus,\odot)$

↳ rendezett elempárok halmaza

1, $(m;n)\oplus(p;q):=(m+p;\,n+q)$

$(m;n)\odot(p;q):=(mp+nq;\,mq+np)$

áll.: $\oplus,\odot$ komm., asszociatív

$\odot$ disztributív az $\oplus$-ra nézve

2, ϱ: $(m;n)\varrho(p;q):=m+q=n+p$

állítjuk: ϱ az $(\mathbb{N}^2,\oplus,\odot)$-ban kongruenciareláció

- ekvivalenciareláció

- $(m;n)\varrho(p;q)$ és $(m';n')\varrho(p';q')\Rightarrow$

$\Rightarrow[(m,n)\oplus(m',n')]\varrho[(p,q)\oplus(p';q')]$ és

$[(m;n)\odot(m',n')]\varrho[(p;q)\odot(p';q')]$

3, $(\mathbb{N}^2/\varrho\,;\oplus;\odot)$ integritástartomány

faktorstruktúra (osztályok halmaza) — algebrai struktúra (félcsop...)

$\oplus,\odot$: komm; assz; $\odot$ az $\oplus$-ra disztributív

$\exists$ neutrális elem, $\exists$ egységelem, $\exists$ minden elemnek additív inverze, nullosztómentes.

neutrális elem: $\overline{(k,k)}\to$ osztály (pl: $(1,1),(2,2)\ldots$)

egységelem: $\overline{(n+1;n)}$

additív inverz: $-\overline{(m;n)}=\overline{(n;m)}$

4, $(\overline{\mathbb{N}})$ ← $(\mathbb{N}^2/\varrho,\oplus,\odot)$ <külső halmaz> $\overline{\mathbb{N}}=\{\overline{(n+m,m)}\mid m,n\in\mathbb{N}\}$

$(\overline{\mathbb{N}},\oplus,\odot)\cong(\mathbb{N},+,\cdot)$

izomorf

izomorfia: $(\overline{(m+n,n)}\mapsto m)$

visszaszerzi a halmazt → átöröklődik a tulajdonság

5, $\overline{(m,n)}=\overline{(m+t;t)}\oplus\overline{(k,k+n)}=\overline{(m+t,t)}\oplus-\overline{(k+n,k)}$

$\boxed{\{\overline{(m,n)}\mapsto m-n\}}$

6, $(\mathbb{N}^2/\varrho,\oplus,\odot)$ helyett $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ jelölés

$\mathbb{Z}:=\{\ldots-2;-1;0;1;2\ldots\}$

egész szám: felírható két természetes szám különbségeként

$(\mathbb{Q},+,\cdot)$ kiépítése

IX

$\mathbb{Z}_0=\mathbb{Z}\setminus 0$

1, $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0,\oplus,\odot)$;

<def. szerint>

$(m,n)\oplus(p;q):=(mq+np,\,pq)$

$(m,n)\odot(p;q):=(mp,\,nq)$

áll: $\oplus;\odot$: komm, asszociatív

$\odot$ $\oplus$-ra nézve **NEM** disztributív

2, ϱ: $(m,n)\varrho(p;q):=mq=np$

áll.: ϱ: $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0,\oplus,\odot)$-ban kongruenciarel.

- ϱ ekvivalenciareláció

- $(m,n)\varrho(p,q)$ és $(m',n')\varrho(p';q')\Rightarrow$

$\Rightarrow[(m,n)\oplus(m',n')]\varrho[(p,q)\oplus(p';q')]$

$[(m;n)\odot(m',n')]\varrho[(p,q)\odot(p';q')]$

<a rel felbontja a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0$-t halmazokra>

3, $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0/\varrho,\oplus,\odot)$-test

- $\oplus;\odot$: komm, asszoc., $\odot$ $\oplus$-ra nézve disztrib.
- $\exists$ zéruselem, egységelem, additív inverz, multiplikatív inv.
- zéruselem: $\overline{(0;n)}$, egységelem: $\overline{(1;n)}$

additív inverz: $-\overline{(m;n)}=\overline{(-m;n)}$

multiplikatív inv: $\overline{(m;n)}^{-1}=\overline{(n;m)}$

4, $(\overline{\mathbb{Z}})$ ← $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0/\varrho,\oplus,\odot)$ $\overline{\mathbb{Z}}=\{\overline{(m\cdot n,n)},\,m\in\mathbb{Z},\,n\in\mathbb{Z}_0\}$

$(\overline{\mathbb{Z}},\oplus,\odot)\cong(\mathbb{Z},+,\cdot)$

izomorfia $(\overline{(m\cdot n,n)}\mapsto m)$

5, $\overline{(m,n)}=\overline{(mt,t)}\odot\overline{(k,kn)}=\overline{(mt,t)}\odot\overline{(kn,k)}^{-1}$

$\boxed{\{\overline{(m,n)}\mapsto m\cdot n^{-1}=\frac{m}{n}\}}$

6, $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_0/\varrho,\oplus,\odot)$ helyett $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ jelölés

$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n},\,m\in\mathbb{Z},\,n\in\mathbb{Z}_0\}$

rac. szám: felírható két egész szám hányadosaként

6; Reciprok egyenlet

32. tétel

Def: $f(x)=0$ egyenlet reciprokegyenlet, ha $f(\alpha)=0$ esetén $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$ is teljesül azonos multiplicitással.

(Ha (alfa) α 5-szörös gyök volt $\Rightarrow \frac{1}{\alpha}$ is 5 szörös gyök)

Def: $f(x)=a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ egyenletet szimmetrikusnak nevezzük, ha $a_n = a_0$
$a_{n-1}=a_1$, $a_{n-2}=a_2$ (együtthatói szimmetrikusak)
Antiszimmetrikus, ha (előjelben térnek el az együtthatók) $a_n = -a_0$
$a_{n-1}=-a_1$
$a_{n-2}=-a_2$

Tétel: $f(x)=0 \Leftrightarrow$ reciprokegyenlet, ha vagy szimmetrikus, vagy antiszimmetrikus.

Biz: $f(x)=0$ gyökei $z_1, z_2, \dots, z_n \rightarrow$ gyökök és együtthatók összefüggését
$\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_n} \rightarrow$ —〃—
$\Downarrow$
〃 = 〃

lásd tk. $a_n = \pm a_0$

$a_{n-1}=a_1$ $\quad$ $a_{n-1}=-a_1$

a; ± 1 gyökök leválasztása

$$f(x) = (x-1)^{k_1} \cdot (x+1)^{k_2} \cdot f_1(x)$$

b; Ha $f_1^\circ \geq 1$ $\underline{f_1(x) = 0}$ megoldása $\left(f_1(\pm 1) \neq 0 \right)$ *

$f_1(x) = 0$ alakja: $f_1^\circ = 2m$ (páros fokszám) — szim. / antisz.; $f_1^\circ = 2m+1$ (páratlan fokszám) — szim. / antisz.

$f^\circ = 2m$; f_1 = antisz.

$$f_1(x) = a_{2m} x^{2m} + a_{2m} x^{2m-1} + \dots - a_{2m-1} x - a_{2m}$$

de $f_1(1) = 0$ ellentmondás, (mert már kivettem * ezt.)

behelyettesítve

$f^\circ = 2m+1$; f_1 szim. / f_1 antisz. — $f_1(1) = 0$ vagy $f_1(-1) = 0$

ellentmondás

Köv: $f_1^\circ = 2m$, $f_1(x)$-nek szimmetrikusnak kell lenni.

(Mindig páros fokszámú és szimmetrikus)

$$f_1(x) = b_{2m} \cdot x^{2m} + b_{2m-1} \cdot x^{2m-1} + \dots + b_{2m-1} \cdot x + b_{2m} \quad / : x^m$$

$$b_{2m}\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + b_{2m-1}\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \dots +$$

$$+ b_{m+1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + b_m = 0$$

$$\mathcal{L}: y := x + \frac{1}{x}$$

de; $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x^{2} \cdot \frac{1}{x} - 3x\frac{1}{x^2} = y^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = y^2 - 3y$$

$$\boxed{C_m \cdot y^m + C_{m-1} \cdot y^{m-1} + \ldots + C_1 y + C_0 = 0}$$

$y_1; y_2; \ldots; y_m \rightarrow m$ db gyök

$x + \frac{1}{x} = y_i \Rightarrow \begin{cases} x_{i1} \\ x_{i2} \end{cases} \rightarrow 2m$ db gyök

(Minden y-hoz két x gyök tartozik)

Mj: Gyökképlettel mindig megoldható reciprokegyenletek maximális fokszáma: 9
(olyan 9-ed fokú egyenlet nincs, amelynek a ± 1 ne lenne gyöke $\Rightarrow$ 8-ad fokú egyenletet kapunk beosztás 2-vel 4-fokú egyenlet $\Rightarrow$ amely már megoldható)

Ezek az együtthatók speciális voltából valók és ezek algebrai úton megoldhatók.