$\Psi(a') = ? = aH = \bar{a}$

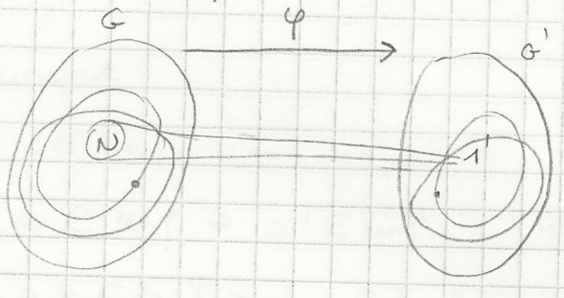
$\varphi ah = \varphi(a)\cdot\varphi(h) = \varphi(a) = a'$

$h \in \ker\varphi$

$\Psi(a'\cdot b') \overset{\varphi \text{ homomorf.}}{=} \overset{\Psi((ab)')}{abH} = aH\cdot bH = \Psi(a')\cdot\Psi(b')$

Izomorfizmus tétel:

$\varphi: G \to G'$ szürjektív homomorfizmus, jelölés: $N = \ker\varphi$



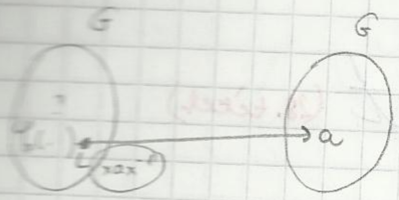
Ekkor kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető a G' csoport részcsoportjai, és a G azon részcsoportjai között, amelyek tartalmazzák az N-et ($\ker\varphi$)
Ennek a hozzárendelésnek normális részcsoportnak normális részcsoport felel meg.

$\varphi_x : G \to G \qquad x \in G \qquad x$ rögzített

(1.) $\varphi_x(a) = \underbrace{x^{-1}ax}$

a-nak a konjugáltja (x-vel való konjugáltja)

$\varphi_x(a\cdot b) = x^{-1}abx = x^{-1}a1bx = \underbrace{x^{-1}ax}\cdot\underbrace{x^{-1}bx} = \varphi_x(a)\varphi_x(b)$



$\varphi_x(\quad) = x^{-1}(\quad)x \;\rightarrow\; \varphi_x(xax^{-1})$

$\forall a$-nak $\exists$ őse.

Injektív: $\varphi_x(a) = \varphi_x(b) \Rightarrow a = b$

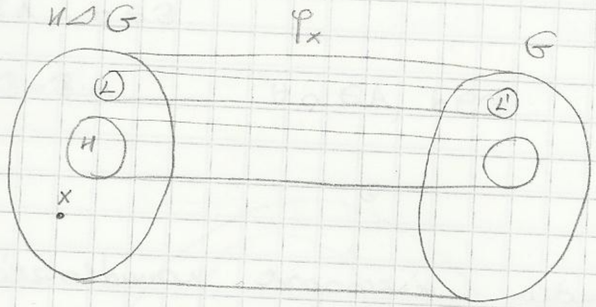
$x^{-1}ax = x^{-1}bx$ /balról $\cdot\, x$, jobbról $\cdot\, x^{-1}$

$\Downarrow$

$a = b$

$\Downarrow$

φ_x: homomorfizmus, szürjektív, injektív, izomorfizmus } automorfizmus



$\forall x \in G$

$\varphi_x(H) = x^{-1}Hx = H$ → mert H normálosztó

$x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx \mid h \in H\}$

$\varphi_x(a) = x^{-1}ax$ belső automorfizmusnak nevezzük.

Normálosztó: Olyan részcsoport, amelyet minden belső automorfizmus önmagára képez le.

III. 24.

7. előadás

Direkt szorzat (28. tétel)

Legyen $A, B \leq G$ (részcsoportja a G-nek). A G az A és B részcsoportjának direkt szorzata ($G = A \otimes B$), ha

1, A és B generálja a G-t vagyis $G = \langle A, B \rangle$
($\forall g \in G$, $g = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n$, $a_i \in A$, $b_i \in B$)

2, $A \cap B = \{1\}$

3, $A, B \trianglelefteq G$ ↳ normálosztó

pl.: $G = C_6(a) = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$

$A = \{1, a^2, a^4\}$

$B = \{1, a^3\}$

3, (tulajdonság)
(Az Ábel-csoportban minden részcsoport normálosztó)
A ciklikus csoport Ábel csoport ⇒ minden részcsoport normálosztó.

$A, B \trianglelefteq G$;

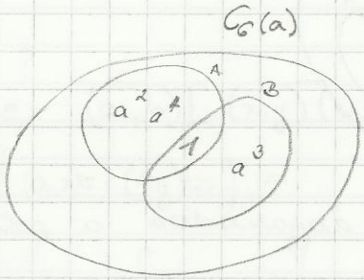
2, (tul.)

$A \cap B = \{1\}$

1, (tul.)

$a = a^4 \cdot a^3$ $\quad$ $a^3 = a^3 \cdot 1$ $\quad$ $a^5 = a^2 \cdot a^3$

$a^2 = a^2 \cdot 1$ $\quad$ $a^4 = a^4 \cdot 1$ $\quad$ $1 = 1 \cdot 1$



$$C_6(a) = A \times B = C_3(a^2) \times C_2(a^3)$$

véges
kommutatív
Abel-féle

$$\left.\begin{matrix}\text{véges} \\ \text{kommutatív} \\ \text{Abel-féle}\end{matrix}\right\} \text{csoport}$$

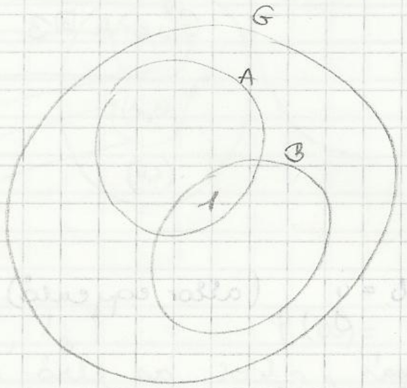
$$A = \{1, a^2, a^4\} = C_3(a^2)$$

$$B = \{1; a^3\} = C_2(a^3)$$

$G = A \otimes B \Rightarrow$ belső direkt szorzat

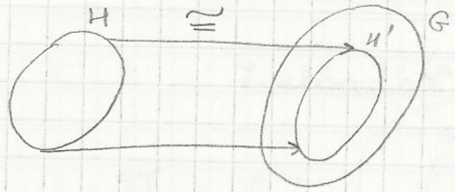
1, $\forall\, g \in G$ egyértelműen előállítható $g = a \cdot b$ alakban, ahol $a \in A$, $b \in B$.

2, $A \cdot B = B \cdot A$ $\quad \forall\, a \in A, b \in B$



Külső direkt szorzat:

Def: A H csoport be van ágyazva a G-be, ha ott van olyan $H' \leq G$ részcsoport, amely $H \underset{\text{izomorf.}}{\cong} H'$.

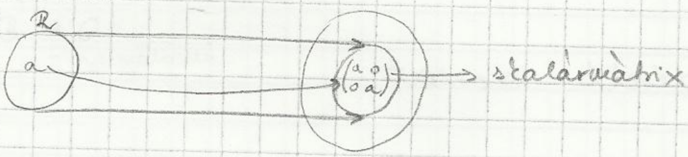


A valós számok be vannak ágyazódva a polinomgyűrűbe

$ax^0 = a1 = a$ $\qquad$ $\underset{\text{polinom}}{2x^0} \neq \underset{\text{szám}}{2}$

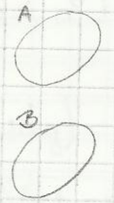
$a \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $\qquad$ $a+b \to \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$

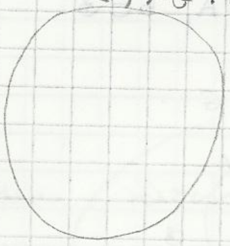
$b \to \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $\qquad$ $a \cdot b \to \begin{pmatrix} a\cdot b & 0 \\ 0 & a\cdot b \end{pmatrix}$



Legyen A és B tetszőleges csoport.

1.,





$(G;\cdot) = G^*$: külső direkt szorzata A-nak és B-nek.

$G^* = A \boxtimes B$

$G = A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$

- $(a,b) = (x,y) \Leftrightarrow a = x,\ b = y$ (akkor egyenlő)
- $(a,b)(x,y)$ = rendezett elempár, ahol az első az A-ból, második a B-ből származik.

(ax, by)

3 művelet (G-n, A-n, B-n)

A $\quad$ B $\Rightarrow (ax, by) \in G$

Tehát a „·" művelet.

asszociatív:

$$[(a,b)(x,y)](v,z) \overset{?}{=} (a,b)[(x,y)(v,z)]$$

asszociativitás: azért áll, mert a ,·' színt művelet. Egyenesse csak két számot tudunk összeszorozni.

$$[(ax, by)](v,z) = [(ax)v, (by)z] =$$

$$= (a(xv), b(yz)) = (a,b)[(xv, yz)] = (a,b)[(x,y)(v,z)]$$

- egységelem:

$$(\underset{A}{1}, \underset{B}{1})(a,b) = (a,b)$$

- inverzelem

$$(a^{-1}, b^{-1})(a,b) = (\underset{A}{1}, \underset{B}{1}) \qquad (a,b)^{-1} = (a^{-1}; b^{-1})$$

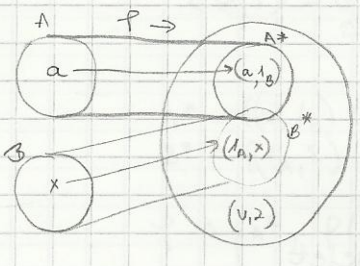
$$\Downarrow$$

$$\langle G, \cdot \rangle = G^* \text{ csoport.}$$

$\boxed{\times}$: külső direkt szorzat

8. előadás

III. 31.



$$a \xrightarrow{\varphi} (a, 1_B) \qquad \varphi(a) = (a, 1_B)$$

$$\varphi: b \to (b, 1_B) \qquad \varphi(b) = (b, 1_B)$$

$$\varphi(ab) = (ab, 1_B) = (a, 1_B)(b, 1_B) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

$$\Downarrow$$

φ homomorfizmus

$\varphi : A \to A^* \overset{?}{\Rightarrow} A \cong A^*$

φ szürjektív ? $\qquad A^* = \{(a, 1_B) \mid a \in A, 1_B \in B\}$

$\varphi(a) = \varphi(b)$

$(a, 1_B) = (b, 1_B) \Rightarrow a = b \Rightarrow \varphi$ injektív $\Rightarrow$ IZOMORFIZMUS

$\psi(x) = (1_A, x) \qquad B \cong B^*$

A és B be van ágyazva a G^*-ba

(G^*: külső direkt szorat)

$G^* = A^* \otimes B^*$
↓
belső direkt szorat

$A^* \boxtimes B^* = \boxed{G^* \overset{?}{=} A^* \otimes B^*} \cong A \otimes B$

↳ Biz be!

I. $G^* \overset{?}{=} \langle A^*, B^* \rangle$

$\forall (a, x) \in G^* \qquad (a, x) = (\underbrace{a, 1_B}_{A^*})(\underbrace{1_A, x}_{B^*})$

II. $A^*, B^* \underset{\text{részcsop.}}{\leq} G^*$

A^* részcsoport (igaz, mert $A \cong A' \underset{\text{rcs.}}{\leq} G$)

$\forall (a, 1_B), (b, 1_B) \in A^*$

1, $(a, 1_B)(b, 1_B) = (ab, 1_B) \in A^*$ művelet

2, $(1_A, 1_B) \in A^*$

3, $(a, 1_B)^{-1} = (a^{-1}, 1_B) \in A^*$

részcsoport

$\forall (v, z) \in G^*$

4, $(v, z)^{-1}(a, 1_B)(v, z) = (v^{-1}, z^{-1})(a, 1_B) =$

$= (\underbrace{v^{-1} a v}_{\text{szorzata A-ban}}, z^{-1} 1_B z) = (v^{-1}a, v, 1_B) \in A^*$

1-4, $\Rightarrow$ normálosztó A^* a G^*-ban : $A^* \lhd G$

$B^* \lhd G$

II. $A^*, B^* \lhd G^*$

III. A és B mindkettőben a neutrális elem van, azaz 1.

$(a, x) \in A^* \cap B^*$

$$\left.\begin{array}{lll}(a, x) \in A^* & \Rightarrow & x = 1_B \\ (a, x) \in B^* & \Rightarrow & a = 1_A\end{array}\right\} (a, x) = (1_A, 1_B)$$

Bebizonyítottuk:

$$G^* = A^* \otimes B^*$$

$\Downarrow$ belső direkt szorzat.

$A \boxtimes B \cong A \otimes B$ A külső direkt szorzat egyenlő a belső direkt szorzattal

Röviden: I. $A, B \Rightarrow G = A \times B$

$\langle G, \cdot \rangle = \underset{\text{csop}}{G^*} = A \boxtimes B$ ①

II.

$A^* = \{(a, 1_B) \mid a \in A, 1_B \in B\}$
$B^* = \{(1_A, x) \mid 1_A \in A, x \in B\}$

$\varphi : A \to A^*$, $\varphi(a) = (a, 1_B) \Rightarrow \varphi$ izomorf. $A \overset{1}{\cong} A^*$

$B \cong B^*$ ②

III. $G^* = A^* \otimes B^*$ ③

1; $G^* = \langle A^*, B^* \rangle$

2; $A^*, B^* \lhd G^* \Rightarrow 1-4;$

3; $A^* \cap B^* = \{(1_A, 1_B)\}$

$$\underline{\underline{G^* = A \boxtimes B}} \overset{(1,3)}{=} A^* \otimes B^* \underset{\Downarrow}{\cong} \underline{\underline{A \times B}}$$

Ciklikus csoport

$C_n(a)$ → ciklikus n-edrendű a-val generált

$n = s \cdot t \quad (s,t) = 1.$

$C_n(a) = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$

$C_s(a^t) = \{1, a^t, a^{2t} \dots a^{(s-1)t}\}$

$C_t(a^s) = \{1, a^s, a^{2s} \dots a^{(t-1)s}\}$

$\forall a^i \in C_n(a)$

$(s,t) = 1 \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} \quad 1 = ks + lt$ egyértelműen.

$i = iks + ilt$

$a^i = a^{iks + ilt} = a^{sik} \cdot a^{til} = \underbrace{(a^s)}_{C_t(a^s)}{}^{ik} \cdot \underbrace{(a^t)}_{C_s(a^t)}{}^{il}$

Tétel: Legyen $C_n(a)$ olyan ciklikus csoport, hogy $n = s \cdot t$ és $(s,t) = 1. \Rightarrow C_n(a) = C_t(a^s) \otimes C_s(a^t)$

IV.21.

9. előadás

Tétel: Legyen $C_n(a)$ ciklikus csoport, $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$, ahol p_i prím.

$C_n(a) = C_{p_1^{n_1}}(a^{m_1}) \otimes C_{p_2^{n_2}}(a^{m_2}) \dots \otimes C_{p_s^{n_s}}(a^{m_s})$

$m_i = \frac{n}{p_i^{n_i}}$

BIZ.: s-szerinti indukcióval

$C_6(a) = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ Keressük meg az összes részcsoportját!

$H_1 = \{1\}$

$H_2 = \langle a \rangle = C_6(a)$

$H_3 = \langle a^2 \rangle = \langle 1, a^2, a^4 \rangle = C_3(a^2)$

$H_4 = \langle a^3 \rangle = \langle 1, a^3 \rangle = C_2(a^3)$

$H_5 = \langle a^4 \rangle = \langle 1, a^4, a^2 \rangle = C_3(a^4)$

$H_6 = \langle a^5 \rangle = \langle 1, a^5, a^4, a^3, a^2, a \rangle = C_6(a^5)$

$(5, 6) = 1$

Bizonyítás:

Legyen $C_n(a)$

$H = \langle a^i \rangle \subseteq C_n(a)$ részcsop. $, (i, n) = 1.$

$\exists\ u, v \in \mathbb{Z} \quad iu + vn = 1.$

↳ lnko miatt írható fel.

$\forall\ a^j \in C_n(a)$ (j tetszőleges)

$iuj + vnj = j$ (jobbról megszoroztuk j-vel)

$$a^j = a^{iuj + vnj} = (a^i)^{uj} \cdot \underbrace{(a^n)^{vj}}_{1} = (a^i)^{uj}$$

Tehát $\langle a^i \rangle = C_n(a)$, ha $(i, j) = 1$.

Igaz visszafelé is. Ha egybeesik ⇒ relatív prím a hatvány.

$C_8(a)$

$\langle a^2 \rangle = \{1, a^2, a^4, a^6\} = C_4(a^2)$

$\langle a^3 \rangle = C_8(a^3)$ nem triviális részcsoportok

$\langle a^4 \rangle = \{1, a^4\} = C_2(a^4)$

$\langle a^5 \rangle = C_8(a)$

$\langle a^6 \rangle = \{1, a^6, a^4, a^2\} = C_4(a^6) = C_4(a^2)$

$\langle a^7 \rangle = C_8(a)$

C_8