A jobboldali mellékosztályt hasonlóan definiáljuk.

A mellékosztályok tulajdonságai:

1., Ha $g \in G \Rightarrow gH = H$

Mivel g és g_i ($\forall$ i-re) $\Rightarrow g \cdot g_i$ is a H-ból van. $\Rightarrow gH \subseteq H$

ha $g \cdot g_i = g g_j \Rightarrow g_i = g_j$ $\qquad g_0 = 1.$

$f : g_i \rightarrow g \cdot g_i \qquad (Hg \rightarrow H)$

bijektív (ha gH 100 különböző elem $\Rightarrow H$ is 100 különböző elem)

$\Downarrow$

$H \subseteq Hg \Rightarrow H = Hg$

Mj.: Ha $g \notin H \Rightarrow gH$ nem részcsoport.

Ha $g \cdot g_i = 1 \quad g_i \in gH \Rightarrow g_i = g^{-1} \notin H \qquad 1 \notin gH$

azaz, nem részcsoport.

II., $\forall$ $h, g \in G \Rightarrow |g \cdot H| = |hH|$

Fent beláttuk, hogy a mellékosztályban minden elem különböző

$f : H \rightarrow gH \qquad f(g_i) = g \cdot g_i$ bijektív leképezés $\Rightarrow |H| = |gH|$

hasonlóan $|H| = |hH|$

$|gH| = |hH|$

III., $\forall$ $g \in G$-hez $\exists$ olyan mellékosztály, amely tartalmazza a g-t. ($\Rightarrow g \in gH$) minden elem valamely mellékosztályba tartozik

IV., gH jelölésben a g-t a mellékosztály REPREZENTÁNSának nevezzük. (def)

A mellékosztály független a reprezentánsa kiválasztásától.

$\Downarrow$

$g \cdot H = g \cdot g_i \cdot H \quad \forall g_i \in H$

pl.: $\left\{ \frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \frac{4}{8} \ldots \right\}$ mellékosztály

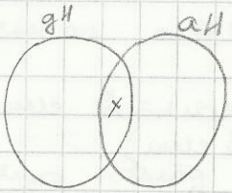
a $\frac{3}{6}$ képviselhető $1/2$-del is.

$$g \cdot g_i \cdot H = g(\overbrace{g_i H}^{H}) = gH$$

mert asszociatív a csop-ban a szorzás

g_i a H-ból van $\Rightarrow gH = H$, ha $g \in G$

v., Két mellékosztály vagy egybeesik, vagy metszetük üreshalmaz



$x \in gH \cap aH$

$x \in gH \Rightarrow x = g \cdot g_i$ $\qquad xH = gg_i H) = gH$

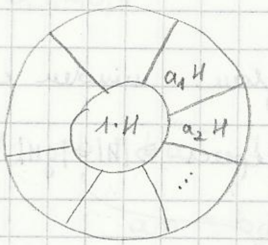
$x \in aH \Rightarrow x = a \cdot g_j$ $\qquad xH = a(g_j H) = aH$

$\Rightarrow gH = aH$

a (IV) v. (I)-esből köv.

A metszet egybeesik $gH = aH$

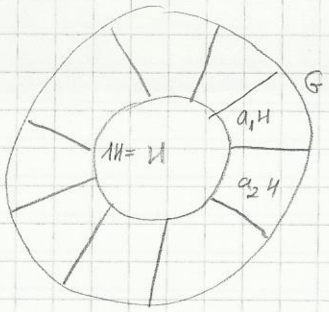
3., (III.) tul. le lehet fedni $\Rightarrow$ benne van



Megj.: A jobboldali mellékosztályokra hasonló tulajdonságot bizonyíthatók.

$$\begin{array}{ccc} |gH| & \overset{?}{=} & |kH| \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ |H| & = & |H| \; ✓ \end{array}$$

Csoport felbontása baloldali mellékosztályok szerint (azaz mellékosztályok uniójára)



Legyen $H \subseteq G$
↳ részcsoport

+ : uniót jelent (én jelölöm (+)).

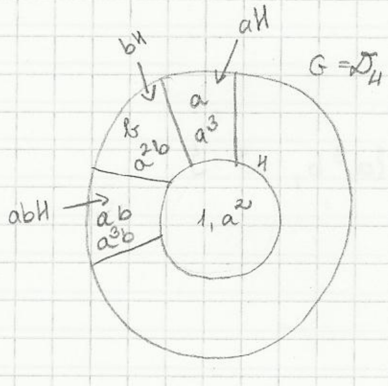
$G = 1H \ (+) \ a_1H \ (+) \ a_2 H (+) \ldots$
↓
III. tul miatt

?
Az uniója üreshalmaz, lefedi az egész csoportot. (

Példa:

$\mathcal{D}_4$

$H = \{1, a^2\}$



$\mathcal{D}_4 = \{\underline{1}, \underline{a}, \underline{a^2}, \underline{a^3}, \underline{b}, \underline{ab}, \underline{a^2b}, a^3\underline{b}\}$

$\mathcal{D}_4 = 1 \cdot H \ (+) \ aH \quad (+) \ bH \quad (+) \ ab\ H$

$\quad\ ||$

$\{1, a^2\} + a\{1, a^2\} + b\{1, a^2\} + ab\{1, a^2\}$

$\{1, a^2\} + \{a, a^3\} + \{b, ba^2 = a^2b\} + ab, a^3b$

$bH = a^2bH$

$\{b, a^2b\} \qquad a^2b\{1, a^2\} = \{a^2b, a^2ba^2\} = \{a^2b, b\}$

egyenlőek (nem mehik egymást, ugyanannyi elemük van)

Az olyan H-kat, ahol a bal és jobboldali mellékosztály egybeesik normálosztónak nevezzük.

D_4

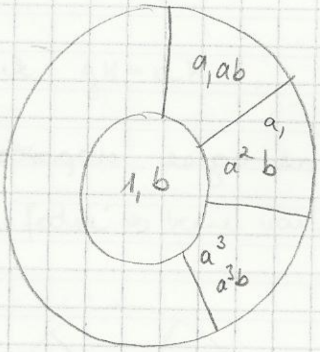
$H = \{1, b\}$

$G = 1H \; (+) \; aH \; (+) \; a^2H \; (+) \; a^3H$

$\{1, b\} \quad a \cdot \{1, b\} + a^2\{1, b\} + a^3\{1, b\}$

$\qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\{a, ab\} + \{a^2, a^2b\} + \{a^3, a^3b\}$



$a \cdot H = \{a \cdot ab\} \rightarrow a^2, a^2b$

$H \cdot a = \{1b \cdot a\} \rightarrow \{ba, a^2\} \Rightarrow \{a^3b, a^2\}$

$aH \neq Ha$

(Osztályozás ekvivalenciarelációt ad meg)

III. 10. 5. előadás

lapon

Normálosztók (szinonimák) (27. tétel) ③

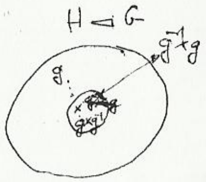
Def: $H \leq G$, A G csoport H részcsoportját a G normálosztójának nev., ha a bal és jobboldali mellékosztályok megegyeznek:

$$gH = Hg \quad \forall g \in G.$$

Megj: Ekvivalens definíciók:

1, $gHg^{-1} = g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G$

2, $\forall g \in G$, ~~$\forall h \in H$~~ $\forall x \in H$: $g^{-1}\cdot xg = g\cdot x\cdot g^{-1} \in H$



$H \lhd G$: H normálosztó G-ben

(Ahhoz, hogy H normálosztó legyen, kell:

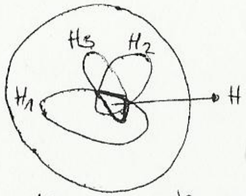
1, H részcsoport

2, vagy a $\underset{(gH=Hg)}{\text{def.}}$, megj. 1-2. teljesüljön.)

Tétel: Normálosztók metszete normálosztó.

Biz: Legyenek $H_i \lhd G$ $(i \in I)$

$$H = \bigcap_{i \in I} H_i \lhd G \ ?!$$



Mivel H_i normálosztó, tehát H_i részcsoport ($\forall i$)

$\Rightarrow$ H részcsoport (a metszetük részcsoport)

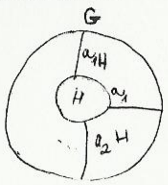
5. előadás

03.10

①

Mellékosztályok felbontása

$H \leq G$



① $G = H \underset{\overset{\uparrow}{\text{unió}}}{+} a_1H + a_2H + \ldots + a_nH + \ldots$ ← G H szerinti baloldali mellékosztályokra való felbontásának nevezzük.

~~Tétel: Lagrange tétele~~

Def: A mellékosztályok számát az ① felbontásban a H baloldali G-beli indexének nevezzük.

Jele: $[G:H]$ – H-nak G-beli indexe

Pl: $[D_4 : \{1, a^2\}] = 4$

A baloldali index és a jobboldali index egybeesik (könnyű belátni).

Tétel: Lagrange-tétele

Legyen G véges csoport, $|G| = n < \infty$; $H \leq G$.

Akkor a $|H|$, és indexe $[G:H]$ osztják a csoport rendjét $|G|$-t.

Pontosabban:

$$\underline{|G| = |H| \cdot [G:H]}$$

$\underline{g^{-1} \cdot x g} \in H \quad \forall g \in G, \forall x \in H$

$\forall g \in G, \forall x \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mert } H \cap}}{H} \rightarrow x \in H_i \;\; \forall i \Rightarrow g^{-1} \cdot x g \in H_i \;\; \forall i \Rightarrow$

$\Rightarrow g^{-1} \cdot x \cdot g \in H = \bigcap_{i \in I} H_i$ ✓

$H \trianglelefteq G$, $G = 1 \cdot H + g_1 \cdot H + g_2 \cdot H + \dots + g_n \cdot H$

$\{\bar{1}, \bar{g_1}, \bar{g_2}, \dots, \bar{g_n}\} \rightarrow n+1$ elem, összeszorozható

$a \cdot H \cdot bH$, H-nak normálosztónak kell lennie!

↑

mellékosztályok szorzása : - asszociatív

$$a \cdot (H \cdot b) \cdot H = a \cdot b \cdot H \cdot H =$$
$$= a \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mellékosztály}}}{b \cdot H}$$

Ha H normálosztó G-ben : ha két mellékosztályt összeszorzom → mellékosztályt kapok.

A mellékosztályok szorzása binér művelet.

$\langle \{\bar{1}, \dots, \bar{g_n}\}, \cdot \rangle$: - asszociatív : elég a reprezentánsokat összeszorozni.

- van-e egységeleme:

$\bar{1} \cdot \overline{g_i} = \overline{g_i}$

~~$1 \cdot H = g$~~

$1 \cdot H \cdot g_i \cdot H = 1 \cdot g_i \cdot H = g_i \cdot H = g_i$ ✓

- inverz:

$(\overline{g_i})^{-1} = (g_i^{-1} \cdot H =) \overline{g_i^{-1}}$

$g_i = g_i \cdot H$

$g_i \cdot H \cdot g_i^{-1} \cdot H = g_i g_i^{-1} \cdot H = 1 \cdot H.$

Tehát ez csoport.

Biz: Legyen $|G| = n$;

$|H| = m$;

$[G : H] = k$.

G-t felbontom H mellékosztályaira

$$G = \underbrace{\underbrace{H}_{m} + \underbrace{g_1 H}_{m} + \underbrace{g_2 H}_{m} + \dots + \underbrace{g_{k-1} \cdot H}_{m}}_{m \cdot k}$$

$\xrightarrow{} $ ~~m~~ $\downarrow n$

$n = m \cdot k$

Kész a biz.

1. Kör:

$$\overset{\text{cs.}}{n} = \overset{\text{r.cs}}{m} \cdot \overset{\text{index}}{k}$$

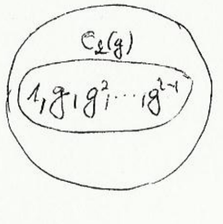
A csoport pontosan, akkor nem tartalmaz triviális részcsoportot, ha prímszámrendű.

2. Kör:

Véges csoportban a csoport rendjét osztja az elem rendje.

$\forall g \in G$, $|G| < \infty \Rightarrow O(g) = k < \infty$

$\{1, g, g^2, g^3, g^{k-1}\} = C_k(g) \leq G$



~~g^{k+1}~~ =

$|C_k(g)| = k = O(g)$

$\Downarrow$ L. tétele

$|G| \,\big|\, C_k(g) \Rightarrow |G| \,\big|\, O(g)$

- A mellékosztályt [illegible] a mellékosztályok halmazára nézve G faktor szerinti csop. nev.: G/H.
- A faktorcsoport elemei mellékosztályok.
- G/H faktorcsoport rendje:

$$|G/H| = [G : H]$$

$\mathcal{D}_4 / H$ $\quad H = \{1, a^2\} \lhd \mathcal{D}_4$ könnyű belátni!

$$\mathcal{D}_4/H = \left\{ \{1, a^2\}, \{a, a^3\}, \{b, a^2 b\}, \{ab, a^3 b\} \right\}$$

$$\{\bar{1} \ , \ \bar{a} \ , \ \bar{b} \ , \ \overline{ab} \}$$

$$\bar{1} \cdot \bar{a} = \bar{a}$$

$$\{1, a^2\} \cdot \{a, a^3\} = \{a, a^3\} = \bar{a}$$

$$(\bar{a})^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = \{a, a^3\} \cdot \{a, a^3\} = \{a^2, 1\} = \bar{1}$$

$$(\bar{b})^2 = \bar{b} \cdot \bar{b} = \{b, a^2 b\} \cdot \{b, a^2 b\} = \bar{1}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \{a, a^3\} \cdot \{b, a^2 b\} = \{ab, a^3 b\} = \overline{ab}$$

$$\bar{b} \bar{a} = \{b, a^2 b\} \cdot \{a, a^3\} = \{b \cdot a, b a^3\} = \overline{b \cdot a} = \overline{a \cdot b}$$

$$\mathcal{D}_4 / H = \langle \bar{a}, \bar{b} \mid (\bar{a})^2 = (\bar{b})^2 = \bar{1}, \ \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a} \rangle$$

kommutatív csop., mert 4 eleme van

$\mathcal{D}_2$

6. előadás

III. 17.

Homomorfizmus (30. tétel)

Def.: $f : G \to G'$ (G, G' csoport) homomorfizmusnak nevezzük, ha

$$\forall \; a,b \in G, \quad f(\underbrace{a \cdot b}_{G \text{ beli}}) = f(a) \underbrace{\cdot}_{G' \text{ beli}} f(b)$$

$$f : \langle g \rangle \to (\overset{\nearrow +}{\mathbb{Z}} ; +)$$
$$\hookrightarrow \{g^i, i \in \mathbb{Z}\}$$

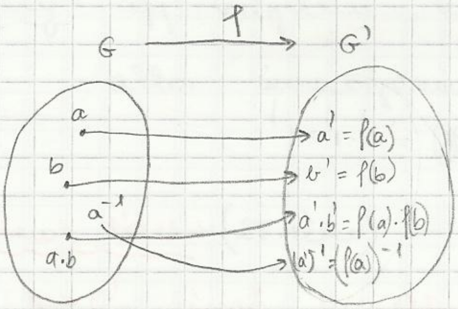
$$f(g^n) = n$$

$$\underbrace{f(g^n, g^m)} = f(g^{n+m}) = n+m = \underbrace{f(g^n) + f(g^m)}$$

Látható: $f(1) = 1'$ (1^*)

$$f(1) = f(g^0) = 0$$

$$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} \quad (2^*)$$



f: homomorfizmus

Def.: Ha f szürjektív és injektív leképezés (bijektív) ⇒ izomorfizmusnak nevezzük

G és G' csoportokat izomorfaknak hívjuk, jel: $G \cong G'$

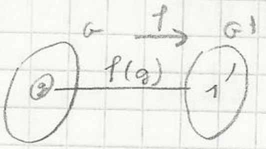
Az izomorf csoportokat (algebrai struktúrákat is) algebrai szempontból azonosnak tekintjük.

Df.:
A csoport önmagára történő izomorfizmusát automorfizmusnak nevezzük.

(Műveletmegőrző, csak megcseréli a csoport elemeit)

Tétel: f homomorfizmus, $(f: G \to G') \Rightarrow \ker f = \{g \in G \mid f(g) = 1'\}$, ha f homomorfizmus magja, normálosztó G-ben.

$\ker f \lhd G$-ben.
↳ normálosztó



BIZ.: részcsoport

1, $1 \in \ker f$

2, $a \in \ker f \Rightarrow a^{-1} \in \ker f$

3, $a, b \in \ker \varphi \Rightarrow a \cdot b \in \ker f$

4, $\forall a \in \ker \varphi$, $\forall x \in G$ $x^{-1} a x \in \ker \varphi$

(1–3: részcsoport; 1–4: normálosztó)

1; (1) $\varphi(1) = 1' \Rightarrow 1 \in \ker \varphi$

2; $a \in \ker \varphi$ $a^{-1} \in \ker \varphi$

3; $a, b \in \ker \varphi$ $\varphi(a,b) \underset{\varphi \text{ homom.}}{\Longrightarrow} \varphi(a)\,\varphi(b) = 1' \cdot 1' = 1'$

$a \cdot b \in \ker \varphi$

4; $a \in \ker \varphi$

$\varphi(a) = 1'$

$\forall x \in G$

$$\varphi(x^{-1} a x) = \varphi(x^{-1}) \cdot \varphi(a) \cdot \varphi(x) =$$

$$= \varphi(x^{-1}) \cdot 1 \cdot \varphi(x) = \varphi(x^{-1}) \cdot \varphi(x) =$$

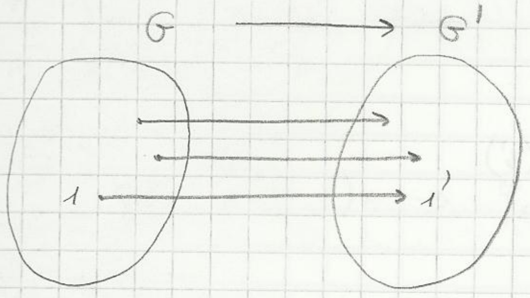
$$= \varphi\, x^{-1} \cdot x = \varphi(1) = 1'$$

$\Downarrow$

$x^{-1} a x \in \ker \varphi \Rightarrow$

$\ker \varphi \lhd G$

Tétel: $\varphi : G \Rightarrow G'$ (homomorfizmus) pontosan akkor injektív, ha $\ker \varphi = \{1\}$



φ injektív (nem lehet két őse)

$\ker \varphi = \{1\}$

Legyen $\ker \varphi = \{1\}$

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$$

$$\downarrow ?$$

$$\varphi(a) \cdot (\varphi(b))^{-1} = 1'$$

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b^{-1}) = 1'$$

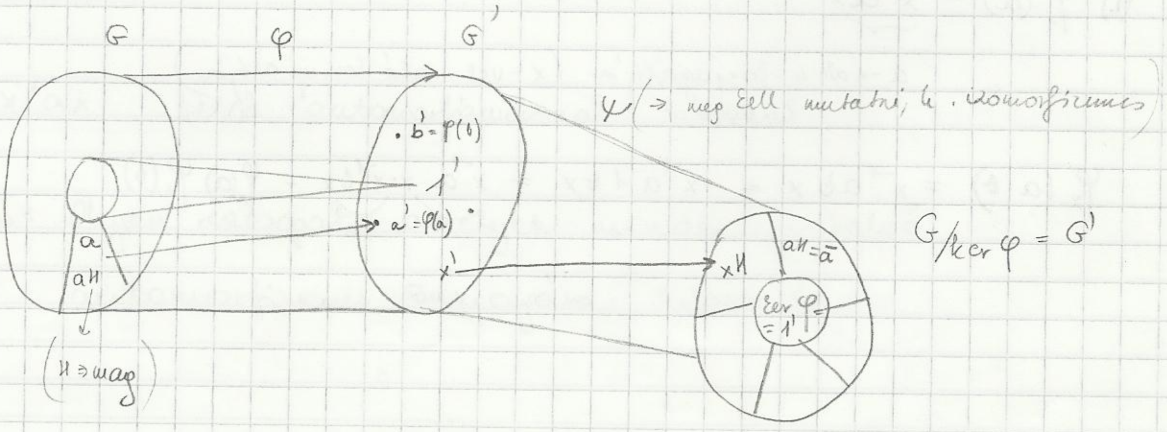
$$\varphi(ab^{-1}) = 1' \xRightarrow[\ker\varphi=\{1\}]{} a \cdot b^{-1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a = b}}$$

Következmény: Egy szürjektív homomorfizmus pontosan akkor izomorfizmus, ha a magja {1}

Homomorfizmus tétel: (27. tétel)

Legyen $\varphi : G \Rightarrow G'$ képező szürjektív homomorfizmus $\Rightarrow$

$G' \cong G/_{\ker \varphi}$ (G' izomorf G a ker φ-vel)



$G/_{\ker \varphi} = G'$