1. előadás

Fuchs: Algebra

Szőkefalvi Béla: Csoportelmélet

Csoportok (25. tétel)

Def.: Ha $A \neq \emptyset$ -on algebrai művelet(ek) van(nak) értelmezve $\Rightarrow$ A-t algebrai struktúrának (algebrának, ált. algebrának, univerzális algebrának) nevezzük.

jel.: $\langle A; F \rangle$

alaphalmaz (tartóhalmaz) — művelethalmaz

pl.: $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$; $\langle \mathbb{Z}; \cdot \rangle$

$\langle N; - \rangle \Rightarrow$ nem algebrai struktúra

Def.: Legyen $\langle G; \cdot \rangle$ algebrai struktúra, ahol a „$\cdot$" binér algebrai művelet.

A $\langle G, \cdot \rangle$ struktúrát csoportnak nevezzük, ha teljesülnek a következő axiómák.

Abel-csop., komm. csop. / csoport:

1, $(ab)c = a(bc)$ $\quad \forall a,b,c \in G$

2, $\exists 1 \in G$, hogy $1a = a1 = a$ $\quad \forall a \in G$ $\quad$ neutrális elem

3, $\forall a \in G$ $\exists a^{-1} \in G$, hogy $a^{-1} \cdot a = 1$

4, $ab = ba$ $\quad \forall a,b \in G$

Megj.: 1, A csoportot a továbbiakban, ha nem vezet félreértéshez az alaphalmazával jelöljük. pl.: G

$\left(\begin{array}{l} + : \text{additív} \\ \cdot : \text{multiplikatív} \end{array}\right)$

2, A csoport alaphalmaza nem üres. (mert a csoport algebrai struktúra)

3, A 2-3↑ axiómákban elégséges megkövetelni a bal (a jobb) neutrális elem létezését, illetve a bal (illetve jobb) inverzelem létezését.

4, Ha a műveletjelet „·"-al jelöljük, a csoport multiplikatív, ha „+"-nal ⇒ a csoport additív.

5, A multiplikatív csoportban a neutrális elem az egységelem, az additív csoportban nullelem vagy zéruselem.

11.18.

2. előadás

Def.: A csoport alaphalmazának számosságát a csoport rendjének nevezzük

jel.: $|G|$

Ha $|G| < \infty$ véges csoportnak nevezzük, ellenkező esetben végtelennek mondjuk.

Tétel: A csoport egységeleme és az elem inverzeleme egyértelműen meghatározott.

BIZ.:

$1, e \in G$

$1 = 1 \cdot e = e$

mivel e is egységelem

$\exists \quad a^{-1} \quad , b$

$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

$ab = b \cdot a = 1$

$a^{-1} \cdot a = 1$

Tétel: A csoportban érvényes az egyszerűsítési szabály. (azaz $ab = ac \Rightarrow b = c$)
$ba = ca \Rightarrow b = a$

$ab = ac$ bal oldalról megszorozzuk a^{-1}

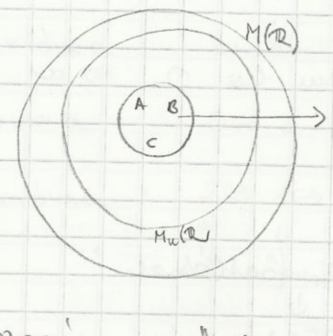
$a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$ asszociativitás miatt

$(a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c$

$1b = 1c \Rightarrow b = c$

Példa:

$\mathcal{M}_{n \times n} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ valós quadratikus $n \times n$ típusú mátrix



$\overline{M}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$

1; A szorás művelet-e $\overline{M}_n(\mathbb{R})$ halmazon? Zárt-e a halmazra nézve?

$A \cdot B$ → meg kell nézni $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B \neq 0$

$A, B \in \bar{M}_n(\mathbb{R})$ $\bar{M}_n(\mathbb{R})$ determinánsa nem 0.

A SZORZÁS MŰVELET!

— " — ASSZOCIATÍV, mert a $M_n(\mathbb{R})$-en is asszociatív

∃ egységelem ⇒ $E_n \in \bar{M}_n$

∃ inverzelem.

Hol helyezkedik el az inverzelem?

Biz: a) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$

$A^{-1} \in \bar{M}_n(\mathbb{R})$

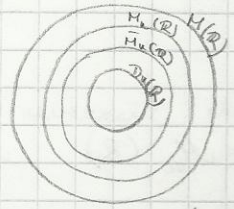
b) $\det(AA^{-1}) = \underbrace{\det A \cdot \det A^{-1}}$

$\det E_n = 1$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det A}}_{\text{mivel szám}}$$

Tudjuk, hogy $\bar{M}_n(\mathbb{R})$ csoport a szorzásra nézve.

Legyen $D_n(\mathbb{R}) \subset \bar{M}_n(\mathbb{R})$



$D_n(\mathbb{R}) = \{A \in \bar{M}_n \mathbb{R} \mid A \text{ diag}\}$

↳ a főátló alatt és felett csak 0 áll
a főátlóban sem lehet 0.

A szorzás nem viszi ki, a főátló sem lesz 0. ⇒ a szorzás művelet.

Asszociatív, ∃ egységelem, ∃ inverzelem csak főátlós-e?
⇓
IGEN!

A szorzás itt kommutatív ⇒

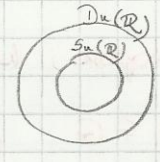
Tehát ez MULTIPLIKATÍV ÁBEL-CSOPORT.

Skalármátrix

Ha megszorozzuk egy mátrixszal, úgy működik,

mintha számot szoroznánk skalárral.

CSOPORT ⇒ könnyen belátható ⇒ öröklődik: kommutatív csoport.



Részcsoportok (26. tétel)

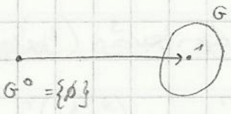
Def.: A $G \supseteq H \neq \emptyset$ a G részcsoportjának nevezzük, ha

üreshalmaz

maga is csoportot alkot, a G műveletének (műveleteinek)

H-ra való leszűkítéseire nézve.

Minden csoportban maga a G és $\{1\}$ (egységelemből álló halmaz) részcsoport. Ezek triviális részcsoportok.



3. csoportaxióma — művelet (egyváltozós)

$G \times G = G^2 \to G$ binér algebrai művelet

$G^0 \to G$ egyváltozós -||-

4. és 1. axióma: binér művelet tulajdonságát írja le

2. axióma: $0 \Leftrightarrow 2$ változó közötti kapcsolatot

3. axióma: $2 \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow 0$ -||-

szorzás, inverz, egységelem

Tétel: (Részcsoport, ha maga is csoport.)

$\emptyset = H \subseteq G$ pontosan akkor ($\Leftrightarrow$) részcsoportja G-nek, ha teljesül:

I., $1 \in H$ nullér művelet → önmagára képzi le

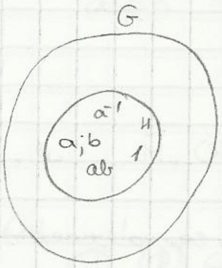
II., $\forall a \in H$, $a^{-1} \in H$ unér művelet

III., $\forall a, b \in H$, $ab \in H$ binér művelet

BIZ.:

! H részcsoport

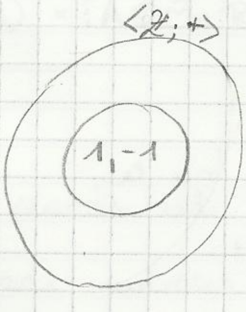
- H csoport a G műveleteinek H-ra való leszűkítésére nézve.
- Az unér művelet a-nak megfelelteti az 1-et, de akkor az a^{-1} benne van.



mivel G-ben van a H, H csoport (asszociatív)

H csoport, mert mind a 3 axióma teljesül

Részcsoport: csoport a csoportban → be kell látni, hogy csoport.



részhalmaz

$\langle \mathbb{Z}, + \rangle \supset \langle \{1, -1\}, \cdot \rangle$

$\Downarrow$

nem részcsoport, mivel a $\cdot$ nem leszűkítése a $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$-nak.

- nem vezet ki
- zárójelezhető
- ∃ egységelem
- ∃ inverzelem

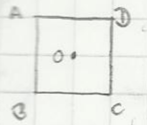
Abel-csoport (multiplikatív)

} $\mathbb{Z}$-ben a $\{-1, 1\}$ → benne van.

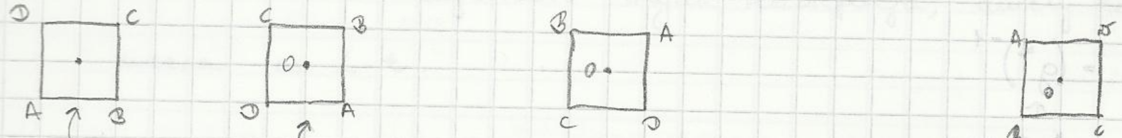
3. előadás

11.25.

~~Feladat~~:



$a : \sqcap \to \sqcap$ 90°-os forgatás
$\downarrow$
leképezi a síkot a síkra



a

$\underbrace{a \cdot a}_{\text{leképezések szorzása}} = a^2$

$a^3 = a \cdot a \cdot a = a \cdot a^2 = a^2 \cdot a$ $(e=)a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a = 1$
$\overset{\shortparallel}{a^0}$

$C_4(a) = \{1, a, a^2, a^3\}$

$a^4 = 1$. $a^{4k} = 1$

Ezen a halmazon értelmezve van egy binér művelet $\Rightarrow$ ez egy ALGEBRAI STRUKTÚRA.

Asszociativitás:

$0 \le i, j, k \le 3$

$(a^i a^j) a^k = a^{(i+j)} \cdot a^k = a^{(i+j)+k} = a^{i+j+k}$

$a^i (a^j a^k) = a^i a^{(j+k)} = a^{i+(j+k)} = a^{i+j+k}$)) tehát asszociatív

Egység: a 0°-os v. 4k foros forgatás $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

Inverzelem: $1 \to 1$
$a \to a^3$
$a^2 \to a^2$ } egymás inverzei

$\exists$ inverzelem.

Kommutativitás: Ábel-csoportot alkot!

$a^i \cdot a^j = a^{i+j} = a^{j+i} = a^j \cdot a^i$ ✓

$(a^i)^{-1}$

$\underbrace{a^i \cdot a^j}_{} = a^0 = \underbrace{a^i a^{4k-i}}_{} = 1$ ✓

Def.: Legyen $g \in G$. Azt mondjuk:

$$g^0 = 1,\ g^1 = g,\ \dots\ g^n = g \cdot g^{n-1}$$

$$\Big(g^n = \underbrace{g \cdot g \cdot \ldots \cdot g}_{n \text{ db}}\Big)$$

$$g^{-n} = \underset{\substack{\uparrow \\ g^n \text{ inverze}}}{(g^n)^{-1}}$$

$(ab)^n \neq a^n b^n$ ⇒ általában a csoportban nem igaz,

de mindig igaz az Ábel-csoportban.

$\{a \mid a^n = 1\} \Rightarrow C_n(a)$

Def.: A legkisebb olyan $n \in \mathbb{N}$-t a g ($g \in G$) elem rendjének nevezzük, amelyre $g^n = 1$. *

Generátorrendszer:

1., Egy elemmel generált csoportok:

Ha $\{g\}$ a G csoport generátorrendszere $= \{g^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ →

→ CIKLIKUS

Minden ciklikus csoport Ábel-csoport.

2., $\{a,b\}$ a G csoport generátorrendszere, ha $\forall\ g \in G$

felírható $g = a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \cdots a^{i_n} b^{j_n}$ $\quad i_n, j_n \in \mathbb{Z}$

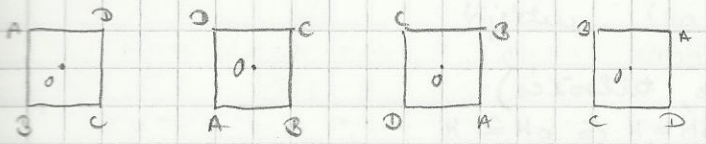
$\{a,b\}$

* Ha nincs olyan n, hogy i^n ⇒ a csoport végtelen.

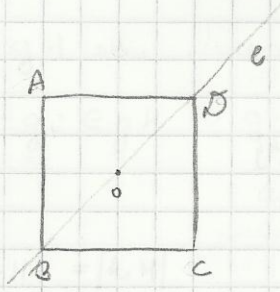
$og = n$

Def.: Az $L \subseteq G$ (halmaz) csoport a $H \leq G$ (részcsop) generátorrendszerének nevezzük, ha H a G legszűkebb olyan részcsoportja, amely tartalmazza az L-t.

$1 \quad a \quad a^2 \quad a^3$

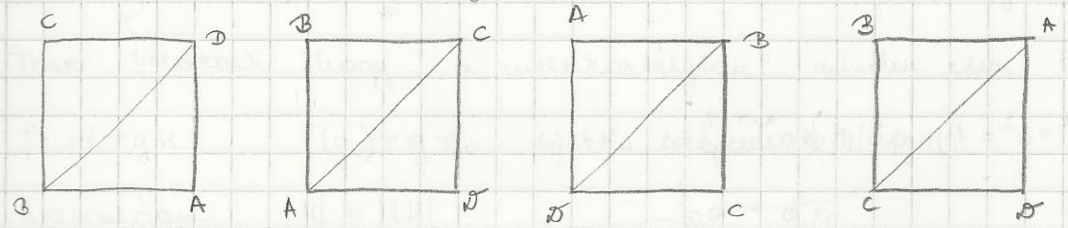


$a = 90°$-os forgatás



$b \xrightarrow{e}$ tükre

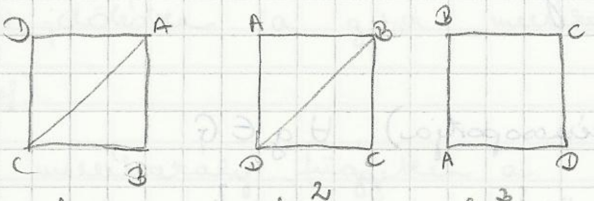
$b^0 = 1$



$b \quad a \cdot b \quad a^2 b \quad a^3 b$

$\{1, a, a^2, a^3, b, ab, ab^2, ab^3\}$ 4. előadás

nem forg. nem tükr. — forg + tükr



$ba \quad ba^2 \quad ba^3$

$a^2 b = ba^2$

$a \cdot b = ba^3$

$C_4(a)$, $C_2(G)$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{ciklikus csoport}}$

$D_4 = \{ a, b \mid a^4 = b^2 = 1, \ ab = ba^3 \}$ $\qquad |D_4| = 8.$

↳ szabályos négyzet, diéder csoport

- a csoport nem kommutatív
- nem ciklikus csoport
- a csoportnak az a és b generátorrendszere

D_5: szabályos ötszög (forgatás, tükrözés)

$D_5 = \{ a, b \mid a^5 = b^2 = 1 ; \ ab = ba^4$

72°-a való forg.

$D_5 = \{ 1, a, a^2, a^3, a^4, b, ba, ba^2, ba^3, ba^4 \}$

$b^i a^j$ $\qquad i = 0, 1$

$\qquad j = 0, 1, 2, 3, 4$

$D_n = \{ a, b \mid a^n = b^2 = 1; \ ab = ba^{n-1} \}$

$a^i b = b a^?$

III. 3.

4. előadás

Mellékosztályok

Def.: Legyen $H \subseteq G$ (H a G részcsoportja), $\forall g \in G$

gH (halmaz) $\qquad H = \{ 1, g_1, g_2 \dots g_n \dots \}$ véges v. végtelen

$gH = \{ g, g \cdot g_1, g \cdot g_2 \dots g \cdot g_n \dots \}$ a G csoport H

szerinti baloldali mellékosztályának nevezzük.

↳ balról szorzunk