7. előadás

Tétel: Legyen $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ és $g:\langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$ differenciálható fgv, ha f-nek létezik primitív fgv-e $\Rightarrow$ $(f\circ g)g'$ fgv-nek is létezik primitív fgv-e és $\exists\, c\in\mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\left(\int (f\circ g)g'\right)(x) = \left(\int f\right)\circ g + c$$

pl.: $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{e^{\ln t}}{e^{2\ln t}+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = *$

$g(x) = \ln x$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$\displaystyle * = \int \frac{\cancel{t}}{t^2+1}\,\frac{1}{\cancel{t}}\,dt = \operatorname{arctg} t + c$

pl.: $\displaystyle\int \frac{1}{1+9x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{3}\,dt = *$

$3x = t$

$x = \frac{t}{3}$ $\left(g(x) = \frac{x}{3}\right)$

$g'(t) = \frac{1}{3}$

$\displaystyle * = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + c$

Függvénysorok, hatványsorok integrálhatósága

Tétel: Legyenek $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $n = 1, 2 \ldots$ integrálható fgv-ek.

Tfh f_n függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez $\Rightarrow$ f integrálható $[a,b]$-n és $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

Előbb integráljuk, utána vesszük a határértéket. Ezek felcserélhetők.

Mj.: Hasonló tétel mondható ki fgvsorokra is. (+k)

Tétel: Tfh $\sum_0^\infty a_n x^n$ hatványsor konvergencia-tartománya a $(-\varrho;\varrho)$ intervallum, ahol $\varrho \in \mathbb{R}_+$, és $f : (-\varrho;\varrho) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ összegfüggvénye $\Rightarrow$

A konvergenciatartományon a fgv-nek van összegfgv-e.

$\Rightarrow$ f integrálható a $(-\varrho;\varrho)$ bármely $[a,b]$-n és $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$

tagonként integráljuk és utána összegezzük.

pl.: $1 - x^2 + x^4 \ldots$ $q = -x^2$

$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \cdot x^{2n}$ konv $\Leftrightarrow$ $x^2 < 1$ $\Rightarrow -1 < x < 1$

1. $f: (-1; 1) \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\sum_0^\infty q^n = \frac{1}{1-q}$$
$$|q| < 1$$

$$\left(\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad x \in (-1;1)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,d(x) = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{0} = \frac{\pi}{4}$$

odaírható, mert $x=1$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$ sor konvergens (Leibniz-sor)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \right]_0^1$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$$

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

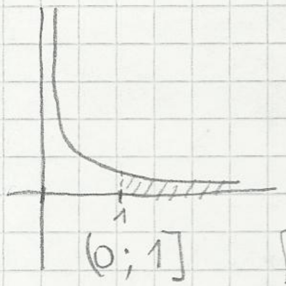
Előállítottuk a π közelítő értékét

Mj.: $\quad 1 - x + x^2 + \dots \qquad q = -x$

$f: (-1; 1) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln|1+x| + C$$

Improprius integrál:



$(0;1]$ $[1;+\infty)$

probléma

nem korlátos

nem zárt

Def.: Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ és $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ függvény. Tfh. f integrálható az $[a,b)$ $\forall$ zárt intervallumán és $F: [a,b] \to \mathbb{R}$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ fgv-nek létezik határ-

$\forall$ részintervallumban integrálható

értéke a ‚b' pontban. Ekkor ezt a határérté-ket az f fgv. $[a,b)$-n vett improprius integráljának nevezzük.

Ha a határérték nem létezik $\Rightarrow$ azt mondjuk, hogy az improprius integrál divergens.

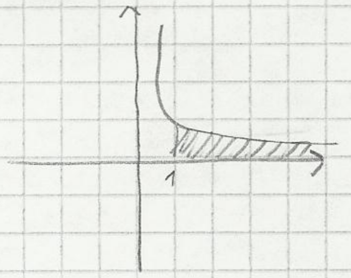
jel: $\int_a^b f(x)\,dx$

Mj.: Ha a határérték $+\infty$ v. $-\infty$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{pmatrix} +\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$$

pl.:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^3}\,dx =$$



$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right]_1^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}}_{\downarrow\, 0} + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Mj: a, Hasonlóan definiálható olyan improprius integrál, ahol $a, b \in \mathbb{R}_b$ (lsd: GYAK!)

b, $\int f' f^{\alpha} = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $\quad \alpha \neq -1$

$\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + c$

c, a rac. törtfgv-ek integrálja (lsd GYAK.)

8. előadás

Metrikus terek

Pl: $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x;y) = x^2+y^2$

$(f((0;1)) = 0^2+1^2 = f(1;1) = 2)$

(Egy számpárhoz hozzárendel egy valós számot)

Szeretnénk meghatározni, hogy milyen fg.

$z = x^2+y^2$

$$\left.\begin{array}{ll} x=0 & \text{parabola} \\ y=0 & \text{parabola} \\ z=0 & \text{kör} \end{array}\right\}$$

forgási parabol~~oid~~ lit

pl. a csészében a tea kavargatása

Rimán-féle $\int$. első kötetet elhozni a következő órára

Def: Legyen X egy adott halmaz és $d: X\times X \rightarrow \mathbb{R}$ fg. olyan fg, melyre érvényesek a következők:

(1) $d(x;y) \geq 0 \quad \forall x;y \in X$ és $d(x;y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(2) $d(x;y) = d(y;x) \quad \forall x;y\in X$

(3) $d(x;y) \leq d(x;z) + d(z;y)$ (Δ egyenlőtlenség)

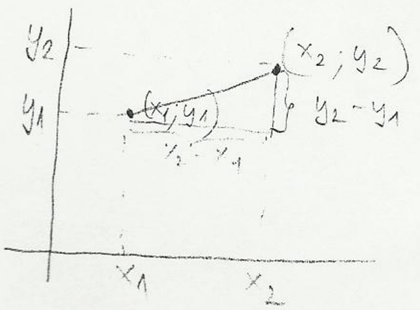
tulajdonság teljesül. Ekkor az $(X;d)$ párt <u>metrikus térnek</u> nevezzük és d fg-t <u>metrikának</u>.

Pl.: (1) $(\mathbb{R};d) \quad d(x;y) = |x-y|$

(2) $(\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}_{\mathbb{R}^2};d_1) \quad d_1(\underline{x};\underline{y}) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\underline{x} = (x_1;y_1)$

$\underline{x}$: vektor $\quad \underline{y} = (x_2;y_2)$



(3) diszkrét metrika
(adott hal-ban ∀ két pont táv 1, önmagától való táv, pedig 0.)

($\mathbb{R}^2$ pocsojaként kell elképzelni és metrika alatt mindig azt értjük.)

Topológia a metrikus terekben

Mj: (1) környezet, belsőpont; külsőpont, határpont, torlódási pont, nyílt halmaz, zárt halmaz (ua. a tétel is)

Def: Legyen $(X; d)$ metrikus tér és $x_0 \in X$. Az x_0 r sugarú környezetén

r sugarú gömbkörnyezet

$$S_r(x_0) = \{ x \mid x \in X;\ d(x; x_0) < r \}$$

halmazát értjük.

x_0 r sugarú környezete

3 dim. gömb, 4 dim. gömb r sugarú nyílt

(2) nyílt lefedőrendszer; kompaktság;

Def: Legyen $(X; d)$ metrikus tér és $H \subset X$.
A ~~ka~~ H halmaz átmérőjén (azt a számot értjük, hogy) $\operatorname{diam} H = \sup\{ d(x; y) \mid x; y \in H \}$ számot értjük.

még téglalap átmérője: $a^2 + b^2$ azaz az átló hossza, akkor is, ha nyílt, ha zárt mert, ha nyílt $\Rightarrow$ felső korlát

Def: Legyen $(X; d)$ metrikus tér és $H \subset X$. A H halmazt korlátosnak nevezzük, ha $\operatorname{diam} H < \infty$. (Ha átmérője véges értékű.)

a; +∞ halmaz átmérője +∞ ezért nem korlátos

<u>Tétel</u>: Legyen $(X; d)$ metrikus tér és $H \subset X$ kompakt $\Rightarrow$ H korlátos és zárt

10. előadás XI.26.

Df.: Legyen $\vec{a}$ és $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ és $\vec{a} = (a_1, a_2 \dots a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2 \dots b_n)$

$(\vec{a}, \vec{b}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} = (x_1, x_2 \dots x_n)$ úgy, hogy

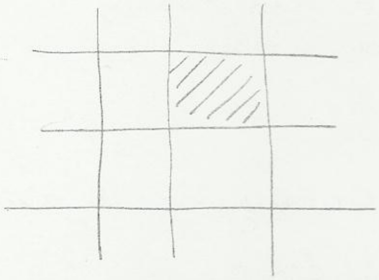
jelölés

$a_i < x_i < b_i \quad \forall i = 1, 2 \dots n \}$

$[\vec{a}, \vec{b}] = \{ \quad \dots \quad - " - \quad \dots, \ a_i \le x_i \le b_i \}$

$[\underline{a}, \underline{b}]$ zárt intervallum, zárt tégla

$(\underline{a}, \underline{b})$ nyílt intervallum, nyílt tégla



Tétel: Ha $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ (n dimenziós) $\Rightarrow [\underline{a}, \underline{b}]$ zárt tégla kompakt.

Tétel: (Heine - Borel)

Ha $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus tér és $H \subset \mathbb{R}^n$, H kompakt $\Leftrightarrow$ H korlátos és zárt.

Tétel: (Bolzano - Weierstrass)

Ha $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus tér és $H \subset \mathbb{R}^n$, H korlátos és végtelen $\Rightarrow$ $\exists$ torlódási pontja.

Sorozatok metrikus térben

Def.: Legyen (X, d) metrikus tér.
Akkor mondjuk, hogy az $\langle \underline{x_n} \rangle : N \to X$ sorozat konver-

többkomponensű, nem egy szám

gens, ha $\exists\ \underline{x_0} \in X\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)\ n > N(\varepsilon) \Rightarrow$
$\Rightarrow d(\underline{x_n}, \underline{x_0}) < \varepsilon$

határérték

Mj.: 216.

- konv $\Rightarrow$ korlátos
- Def: ~~monotonitás~~ (nincs, mert nincs rendezés) nincs metrikus térben
- Def: Cauchy-tul.
  $\langle \underline{x_n} \rangle : N \to X$, $\langle x_n \rangle$ Cauchy, ha $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)$
  $n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow d(\underline{x_n}, \underline{x_m}) < \varepsilon$
- Tétel: $\forall\ \langle \underline{x_n} \rangle : N \to X$ konvergens $\Rightarrow \langle \underline{x_n} \rangle$ Cauchy tulajdonságú
- Tétel: Ha $\langle \underline{x_n} \rangle$ Cauchy tulajdonságú $\to$ korlátos
- Mj.: Cauchy $\to$ konvergencia (tetszőleges esetben nem igaz)
- Def.: A (X, d) metrikus teret teljes metrikus térnek nevezzük, ha minden konvergens sorozat Cauchy tulajdonságú. (valós számok halmaza a távolsággal $\Rightarrow$ teljes metrikus tér)

(Cauchy-tul, konv. $\to \frac{1}{n}$
ha kivesszük a 0-t $\Rightarrow$ nem konv, de Cauchy-tul-ú)

nem teljes metrikus tér

Tétel: $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus tér teljes metrikus tér

Tétel: Legyen $(\mathbb{R}^n, d)$ metrikus tér és $\langle \underline{x_n} \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $\underline{x_n} = (x_{1n}, x_{2n}, \dots x_{nn})$ egy adott sorozat. Az $\langle \underline{x_n} \rangle$ sorozat $\Leftrightarrow$ konvergens, ha minden koordinátasorozat konvergens, és

$\lim\limits_{n \to \infty} \underline{x_n} = \underline{x_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$\underline{x_0} = (x_{10}, x_{20}, \dots x_{n0})$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_{in} = x_{i0}$

Pl.: $\langle \underline{x_n} \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}, \sqrt[n]{n}, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$\underline{x_0} = (1, 1, 0)$

↳ van határértéke

$\lim\limits_{n \to \infty} \underline{x_n} = \underline{x_0}$

Mj.: összegre, különbségre, konstansszorosra hasonló a tétel, mint $\mathbb{R}$-ben.

$f(x,y) = 2xy$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}^2, d_1) \to (\mathbb{R}, d_2)$

(X, d_1) (Y, d_2)

$H_1 \subset X$ $f : H_1 \to Y$