analízis III.
EA.

III. tétel

16

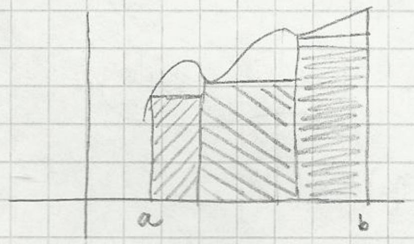
Tétel: (Darboux)

Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fgv. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall D \in \mathcal{D}([a,b])$ és $\|D\| < \delta(\varepsilon)$ esetén:

$$0 \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s(f,D) < \varepsilon \qquad \text{illetve}$$

$$0 = S(f,D) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon$$

ha korlátos a fgv, akkor található olyan beosztás, amely finomítás után közelít a területhez. (nincs pontos!)



Biz.: —

Tétel: Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fgv és $\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a,b])$ normális beosztássorozat.
minden tagja az $[a,b]$ beosztásai.

Ekkor: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,D_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f,D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

$(\omega(f,D) = S(f,D) - s(f,D)$: oszcillációs összeg$)$

4) $\exists \langle \sigma_1(f,D_n) \rangle$ úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_1(f,D_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$
integrálközelítő összegsorozat

$\exists \langle \sigma_2(f,D_n) \rangle$ u.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_2(f,D_n) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Biz.: 1)

! $\varepsilon > 0$ adott és ! $\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a,b])$ normális beontás-sorozat

Darboux. t. miatt

$\exists \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $\|D\| < \delta \Rightarrow 0 \le \int_a^b f(x)\,dx - s(f,D) < \varepsilon$

$\lim_{n \to \infty} \|D_n\| = 0$ $\quad \forall \delta(\varepsilon)\ \exists \underbrace{N(\delta(\varepsilon))}_{N(\varepsilon)}$ úh, ha $n > N(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\left| \|D_n\| - 0 \right|}_{\|D_n\| < \delta(\varepsilon)} < \delta(\varepsilon)$ — konvergencia def.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon)$ $\quad n > N(\varepsilon)$ esetén

$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx - s(f, D_n) < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} s(f, D_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Tétel: Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fgv.

f fgv integrálható $\Leftrightarrow$, ha minden

$\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a,b])$ normális beontássorozat

esetén $\lim_{n \to \infty} \omega(f, D_n) = 0$

Tétel: Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fgv.

Az f fgv Riemann-szerint integrálható $\Leftrightarrow$

minden $\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ normális beontássorozathoz tartozó

$\langle \sigma(f, D_n) \rangle$ integrálközelítő összegsorozat konvergens.

Mj.: Belátható, hogy $\langle \sigma(f, D_n) \rangle$ közös határértékhez tartanak, és ez a közös határérték az integrál.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Biz.: „$\Rightarrow$"

Tfh. f integrálható, $\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a,b])$

$$s(f, D_n) \le \sigma(f, D_n) \le S(f, D_n)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

Mivel a fgv integrálható $\Rightarrow$ egyenlők

A rendőrtétel miatt $\sigma(f, D_n)$ egyenlő a többivel.

„$\Leftarrow$" $\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a,b])$ normális

$\exists \langle \sigma_1(f, D_n) \rangle \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_1(f, D_n) = \int_a^b f(x)\,dx$

$\exists \langle \sigma_2(f, D_n) \rangle \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_2(f, D_n) = \int_a^b f(x)\,dx$

$$\sigma_3(f, D_n) = \begin{cases} \sigma_1(f, D_n), & \text{ha } n \text{ páros} \\ \sigma_2(f, D_n), & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

feltételből $\to \langle \sigma_3(f, D_n) \rangle$ konvergens

(konv $\Leftrightarrow$, ha minden részsorozata konv)

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_1(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma_2(f, D_n)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \text{a fgv integrálható}$$

Tétel: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton fg $\Rightarrow f$ Riemann-szerint integrálható.

Tétel: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow f$ Riemann-szerint integrálható.

BIZ

$\downarrow$

X.8.

4. előadás

Biz.: (monoton ... tétel)

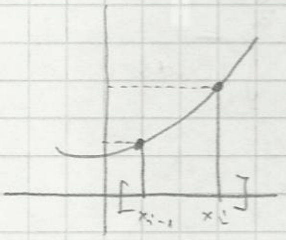
$\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a,b])$ normális beosztássorozat

(f integrálható $\Leftrightarrow$, ha $\omega(f, D_n) \to 0$)

$$\omega(f,D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

$$D_n = \{ x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots x_{k_n}^{(n)} \}$$

Tfh.: f fgv. monoton növekvő



$$\omega(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) \Delta x_i \le \|D_n\| \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) =$$

nagyobb, ha a finomságát vesszük

$$\cancel{f(x_1)} - f(x_0) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \dots + f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})}$$

$$= \underset{0}{\|D_n\|}\left(f(b) - f(a) \right) \to 0.$$

Normális beosztássorozat esetén 0-hoz tart, de mivel ez $\forall$ lehet, így mindig 0-hoz tart, ezzel beláttuk, hogy nullsorozat.

anal III.
EA

Biz.: (folytonos)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos fgv $\Rightarrow$ 1; korlátos (integrálható)

$\Downarrow$ kompakt

2; egyenletesen folytonos

2, $\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta(\varepsilon) \ \forall x,y\in[a,b] \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \ \exists\delta\left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)$ — " — $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$\exists\delta(\varepsilon)$

Legyen a $D\subset\mathcal{D}([a,b])$ beosztás olyan, hogy

$$\|D\|<\underbrace{\delta\left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)}_{\delta(\varepsilon)}$$

$\Downarrow$

$$\forall z_i,y_i\in[x_{i-1},x_i] \ |z_i-y_i|<\delta$$

$M_i-m_i=\sup\{|f(x)-f(y)|, \text{ ha } x,y\in[x_{i-1},x_i]\}$

$\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta(\varepsilon) \quad \|D\|<\delta\left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)=\delta(\varepsilon)$

$$\omega(f,D)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=(M_1-m_1)\Delta x_1+(M_2-m_2)\Delta x_2+\dots$$

$$\dots+(M_n+m_n)\Delta x_n\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2\cancel{(b-a)}}\cdot\underbrace{(\Delta x_1+\Delta x_2+\dots+\Delta x_n)}_{b-a}<\varepsilon$$

$\Downarrow$

állítás

$\forall\varepsilon$-hoz létezik olyan beosztás, hogy az oszcillációs part kisebb ε. $\Rightarrow$ köv. az állítás

Mj.: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fgv. Riemann szerint integrálható $\Leftrightarrow$ f fgv szakadási helyeinek halmaza Lebesgue-szerint nullmértékű.
(Lökek)

Mj(uj): $H\subset\mathbb{R}$ halmaz Jordan-szerint nullmértékű, ha $\forall\varepsilon>0$-hoz megadható (a_1,b_1), $(a_2,b_2)\dots(a_n,b_n)$ (nyílt intervallumok véges halmaza)

$H \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$ $\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \varepsilon$

megadható olyan

intervallum, ami lefedi

~~|--(|)-(|)-(|)--|~~ véges halmaz

$H \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-szerint nullmértékű, ha $\forall \varepsilon > 0$

esetén $\exists (a_1, b_1), (a_2, b_2) \dots$ stb. úgy, hogy

$H \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i, a_i) < \varepsilon$

Tétel: Ha az $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-szerint integrálható $\Rightarrow f$ integrálható az $[a,b]$ minden részintervallumán is.

Tétel: Ha az f fgv az $[a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fgv, és $c \in (a,b)$, f integrálható $[a,c]$ és $[c,b]$-n $\Rightarrow$ $\Rightarrow f$ integrálható $[a,b]$-n és

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Mi: az integrál ~~összeadás~~ intervallum feletti additivitása

Tétel: Ha $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható fgv-ek, és λ és $\mu \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \lambda f + \mu g$ is integrálható, továbbá

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

~~Biz~~: Legyen $\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a,b])$ normális beosztássorozat.

$\sigma(\lambda f + \mu g, D) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda f + \mu g)(\xi_i) \Delta x_i =$

oszcillációs összeg

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)) \Delta x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i +$$

$$+ \mu \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) \Delta x_i$$

mivel f integrálható, $\langle D_n \rangle$ normális

$\lambda \sigma(f, D_n) \to \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

g integrálható, $\langle D_n \rangle$ normális $\Rightarrow$ állítás

$\mu \sigma(g, D_n) = \mu \int_a^b g(x)\,dx$

Tétel: Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható $\Rightarrow$

$\Rightarrow f \cdot g$ is integrálható

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható és $\exists\, c \in \mathbb{R}^+$

$|f(x)| \geq c \quad \forall x \in [a,b] \to \frac{1}{f}$ integrálható.

Mj.: $\frac{g}{f}$ is integrálható (előző feltétellel)

Tétel: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható fgv $\Rightarrow$

$|f|$ is integrálható

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Tétel: Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható, és $f(x) \leq g(x)$

$\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Biz.: integrálközelítő összeggel (t/f) 235

Tétel: Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható fgv és

$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$ és $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x) g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,d(x)$$

(I. középérték tétel ?)

Tétel: Ha $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható és $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Biz.: az előző tétel alapján, ha $g(x) = 1$.

(1 középérték tétel ↑)

IV. tétel

Integrálfüggvény

Def: Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható fgv.

1., $\int_a^b f(x)\,d(x) = 0$

2., $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

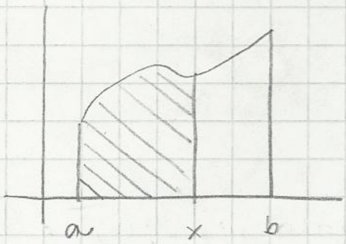
Def. Legyen f fgv $[a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható fgv.

határ

f fgv $[a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ fgv-t f fgv

fgv változó

integrálfgv-nek nevezzük.



analízis III.
1.,

5. előadás

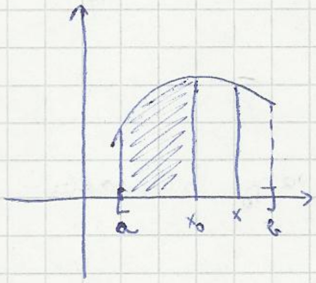
X.15.

Tétel: Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrálható fgv $\Rightarrow$ f integrálfgv-e (F) folytonos.

„Ide nem tudunk beírni végét!”

Biz.: $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ \delta(\varepsilon)$ úh. $\forall\ x\in[a,b]\ \ |F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$

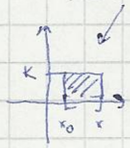
$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \le \underbrace{\int_{x_0}^x |f(t)|\,dt}_{\text{mindig pozitív}} = \operatorname{sgn}(x-x_0)\int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \le *$$



(Mivel nem feltételeztük sehol, hogy $x>x_0$, ezért kell megszorozni $\operatorname{sgn}(x-x_0)$-al, csak ekkor igaz az egyenlőtlenség)

Mivel f korlátos $\exists\ K\in\mathbb{R}\ \ |f(x)|\le K\ \ \forall\ x\in[a,b]$

$$* \le \operatorname{sgn}(x-x_0)\int_{x_0}^x K\,dt = K\underbrace{|x-x_0|}_{<\frac{\varepsilon}{K}} < \varepsilon$$



$\Downarrow$

$\forall\ \frac{\varepsilon}{K}>0\ \ \exists\ \delta\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)=\delta(\varepsilon)\ \ \forall\ x\in[a,b]\ \ |F(x)-F(x_0)|<\frac{\varepsilon}{K}$

Ezzel kész a bizonyítás!

Tétel: Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrálható és F a f fgv integrálfgv-e, ha f folytonos $x_0\in[a,b]$ esetén $\Rightarrow$ F differenciálható és $F'(x_0)=f(x_0)$

17

Biz.:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \exists\text{-e}?$$

$$x-x_0=h \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$$

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right)\right| =$$

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt = F(x)\right)$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{h}\,\text{sgn}\,h \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)|\,dt \qquad \text{Hf.}$$

Def.: Legyen f valamely J intervallumon, vagy intervallumok egyesítésén értelmezett fgv.

F fgv f fgv PRIMITÍV fgv-e vagy határozatlan integrálja, ha $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in J$

Jel.: $\int f(x)\,dx$, $\int f$

Tétel: (Newton-Leibniz) formula

Ha $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható fgv és F fgv a f primitív fgv-e (a,b)-n és F folytonos $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b$

Mj.: 1, F fgv f primitív fgv-e $\Rightarrow F+C$ is primitív fgv.

$$(F+C)'(x) = f(x)$$

2, F és G fgv primitív fgv-ei f-nek valamely intervallumon $\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} \quad F = G + C$

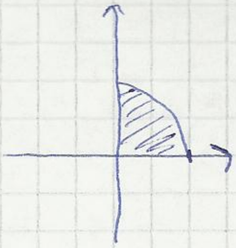
$$(F-G)'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F-G = \text{konstans}$$

konstans deriváltja 0.

Intervallumon deriválható kétszer határozatlan integrál és annak integrálja

3, $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x + C\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$



$= \left(\sin \frac{\pi}{2} + \cancel{c}\right) - \left(\underbrace{\sin 0}_{0} + \cancel{c}\right) = 1$

Biz.: Newton-Leibniz

osztópontok (a beosztáshoz tartozó)

$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{k_n} F(x_k) - F(x_{k-1}) = *$

$\left(\cancel{F(x_1^{(n)})} - \underbrace{F(x_0^{(n)})}_{a} + \cancel{F(x_2^{(n)})} - \cancel{F(x_1^{(n)})} + F(x_3^{(n)}) - \cancel{F(x_2^{(n)})} + \dots + \underbrace{F(x_{k_n}^{(n)})}_{b} - F(x_{k_n-1}^{(n)}) \right)$

F-re érvényesek a Lagrange-tétel feltételei

([ ] in-on folytonos, ( ) in-on diff-ható)

n. sorozat

$F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)}) = \underbrace{F'(\xi_k)}_{f(\xi_k)} (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) = \xi_k \in (x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$

F fgv f prim.-fgv-e

$* \sum_{k=1}^{k_n} f(\xi_k)(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) = \sigma(f, D_n)$

Legyen $\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a,b])$ normális beosztássorozat

$\sigma(f, D_n) \to \underline{\underline{\int_a^b f(x) \, dx}} \Rightarrow = F(b) - F(a)$

analízis II. ea. 1;

6. előadás

X.29

Tétel: Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható fgv-ek

Ekkor $\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x) g(x)'\, dx$

Mj: 1; $\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) g(x)'\, dx$

2; parciális integrálás módszere

Biz.: $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = \int_a^x f'(t)\, g(t)\, dt - f(x) g(x) + \overset{\text{konst.}}{f(a) \cdot g(a)} + \underbrace{\int_a^x f(t)\, g'(t)\, dt}_{\text{Mj 1; -t kell 0-ra redukálni}}$

F differenciálható

$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) - (f(x) \cdot g(x))' + f(x) \cdot g'(x)$

$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) - f'(x) g(x) - f(x) \cdot g(x)' + f(x) g'(x) = 0$

$\Downarrow$

$F(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$

ha fgv konstans $\Rightarrow$ deriváltja 0.

$F(a) = 0 \Rightarrow F(x) = 0$

példa: $\int_1^2 x e^x\, dx$

$g = x \quad f' = e^x$

$g' = 1 \quad f = e^x$

$= \left[x e^x\right]_1^2 - \int_1^2 1\cdot e^x\,dx = 2e^2 - e^1 - \left[e^x\right]_1^2 =$

$= 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$

Tétel: Legyen $g: [a,b] \to [c,d]$, $f: [c,d] \to \mathbb{R}$

! f folytonos és g folytonosan differenciálható $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f\circ g)(x)\, g'(x)\,dx$$

Mj: Helyettesítéses integrálás tétele.

pl:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{e^{\ln t}}{e^{2\ln t}+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = *$$

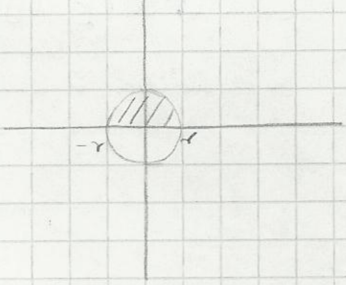
$g(t) = \ln t$ $\quad (g: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad g(t) = \ln t$

$\ln t = 1$ $\quad \ln t = 2$

e $\quad e^2$

$$* = \int_e^{e^2} \frac{\cancel{t}}{t^2+1}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt = \left[\operatorname{arctg} t\right]_e^{e^2} = \operatorname{arctg} e^2 - \operatorname{arctg} e$$

pl:



$x^2 + y^2 = r^2$

$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

$\frac{1}{2} T = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = ▲$

$g(t) = r\sin t$

$g'(t) = r\cos t$

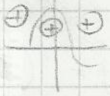
$$▲ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t\,dt = r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1 - \sin^2 t}\cdot \cos t\,dt = ■$$

$r\sin t = r$

$r\sin t = -r$

2,

$$[redacted] = r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{|\cos t|}\cos t \; dt = r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \; dt =$$



$$\left.\begin{array}{l}\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\ \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2x\end{array}\right\} \begin{array}{l}\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \\ \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}\end{array}$$

$$= r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\; dt = \frac{r^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2t \; dt = \frac{r^2}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\underbrace{\cancel{\frac{\sin\pi}{2}}}_{0} - \left(-\frac{\pi}{2}+\underbrace{\cancel{\frac{\sin -\pi}{2}}}_{0}\right)\right) = \frac{r^2\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{T = r^2\pi}$$

Alapintegrálok

- $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1, C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \log x + C$ $(\ln x)$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^+, \; C \in \mathbb{R}$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ $\qquad D_f = \mathbb{R}, \; C \in \mathbb{R}$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ $\qquad D_f = \mathbb{R}, \; C \in \mathbb{R}$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ $\qquad D_f = \mathbb{R}, \; C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C$ $\qquad D_f = \mathbb{R}, \; C \in \mathbb{R}$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin + c$ $D_f = (-1;1)$, $c \in \mathbb{R}$

- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + c$ $D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $c \in \mathbb{R}$

Tétel: Ha f, g $\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, melyeknek $\exists$ primitív függvényei, és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (tetszőleges konstansok) $\Rightarrow$ $\lambda f + \mu g$ fgv-nek is létezik primitív fgv-e és $\left(\int \lambda f + \mu g\right)(x) = \lambda\left(\int f\right)(x) + \mu\left(\int g\right)(x) + c$

$c \in \mathbb{R}$

Tétel: Ha $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, g differenciálható és $f'g$-nek $\exists$ primitív fgv-e $\Rightarrow$ $g'f$-nek is létezik primitív fgv-e, és $\left(\int g'f\right)(x) = fg - \left(\int g f'\right)(x) + c$

$c \in \mathbb{R}$