14

Függvények vizsgálata

Mj.:
- zérushely
- monotonitás
- szélsőérték
- Rf
- konvexitás
- $+\infty$ / $-\infty$ határérték
- szakadási helyeken a jobb és bal oldali határérték
- gráf

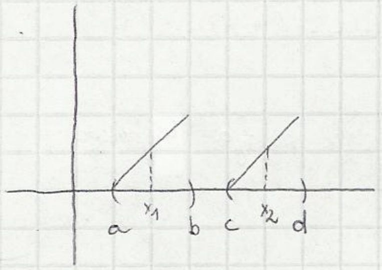
Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, a és $b \in \mathbb{R}_b$, $a < b$

$f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható

f monoton növekedő $\langle a,b \rangle$-n $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in \langle a,b \rangle$

f monoton csökkenő $\langle a,b \rangle$-n $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in \langle a,b \rangle$

Mj.:



$x_1 < x_2$ $f(x_2) \not> f(x_1)$

$f'(x) \geq 0$

A tétel akkor igaz, ha egy intervallumon van értelmezve, és nem pl. intervallumok unióján.

Biz.: "$\Rightarrow$"

f mon növ $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}_{\Downarrow} \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0$$

I.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Tfh. $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \langle a,b \rangle$

$x_1 < x_2$, $\quad x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle$

Lagrange - tétel

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Tfh: $x_2 > x_1$

$x_2 - x_1 > 0$

$\Downarrow$

$f'(\xi) \geq 0$

$\Downarrow$

$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

$\Downarrow$

állítás

Mj.: A szigorú monotonitás TK. *

Szélső érték

Mj.: $f: H \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ belső p H-nak

f diff-ható x_0-ban és f-nek x_0-ban szé-e van $\Rightarrow$

$$f'(x_0) = 0$$

Szé létezésének szükséges feltétele! (tétel)

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak,

f differenciálható fgv.

Ha az x_0 pontban $\exists$ olyan környezete, hogy

$f'(x) \underset{(\leq)}{\geq} 0 \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0)$ és $f'(x) \underset{(\geq)}{\leq} 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + r) \Rightarrow$

f-nek x_0 pontban lokális maximuma van.
(minimuma)

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak

Tfh f $(n-1)$-szer $(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$ differenciálható x_0

egész környezetében és n-szer x_0-ban $\qquad$ Biz.: Taylor-tétel

és $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0$ és $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

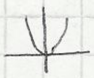
ha n páratlan $\Rightarrow$ f-nek x_0-ban nincs lokális szé-e.

ha n páros $\Rightarrow$ f-nek x_0-ban helyi szé-e van.

$f^{n}(x_0)>0$ helyi minimuma van

$f^{n}(x_0)<0$ helyi maximuma van

Pl.: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2$



$f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f_0(x)=x^3$

$f'(x)=2x$ $\qquad f''(x)=2$

$f'(0)=0$ $\qquad f''(0)=2$

$f_0'(x)=3x^2$ $\qquad f_0''(x)=6x$ $\qquad f_0'''(x)=6$

$f_0'(0)=0$ $\qquad f_0''(0)=0$ $\qquad f_0'''(0)=6$

Spec:

Ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)\neq 0 \Rightarrow x_0$-ban helyi szé van.

$f''(x_0)>0$ minimum

$f''(x_0)<0$ maximum

Konvexitás

Def.: Legyen $H\subset\mathbb{R}$, $f:H\to\mathbb{R}$ $\quad a,b\in\mathbb{R}_b$, $a<b$, $\langle a,b\rangle\subset H$

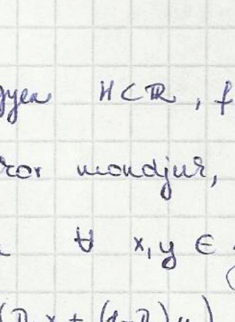
konkáv

Akkor mondjuk, h. az f fgv konvex az $\langle a,b\rangle$-n,

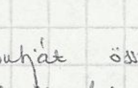
ha $\forall\, x,y\in\langle a,b\rangle$ $x\neq y$ és $\forall\,\lambda\in[0,1]$ esetén

$(\geq)$

$\underbrace{f(\lambda x+(1-\lambda)y)}_{\text{a görbe íveit írja le}} \leq \underbrace{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)}_{\text{az egyenes pontjait adja meg}}$



konkáv: $\forall$ 2 pontját összekötő szelő a görbe alatt helyezkedik el.



Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak.

Ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy f konvex $(x_0 - r; x_0)$ és konkáv $(x_0, x_0 + r)$ (vagy fordítva) akkor x_0-t INFLEXIÓS PONTnak nevezzük.

(pl.: $f(x) = x^3$ esetén $x_0 = 0$ )

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$,

f differenciálható. $\langle a, b \rangle \subset H$

f fgv konvex $\langle a,b \rangle$-n $\Leftrightarrow$ f' mon növ. $\langle a,b \rangle$-n

f fgv konkáv $\langle a,b \rangle$-n $\Leftrightarrow$ f' mon csökk $\langle a,b \rangle$-n

Megj.: intervallumon érvényes

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $f: H \to \mathbb{R}$, $\langle a,b \rangle \subset H$, f $\langle a,b \rangle$-n kétszer differenciálható

f konvex $\langle a,b \rangle$-n $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in \langle a,b \rangle$

f konkáv $\langle a,b \rangle$-n $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in \langle a,b \rangle$

Biz.: következik az előző tételből

IX.24. 2. előadás

Függvényvizsgálat: $\boxed{\text{PÉLDA}}$!

$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

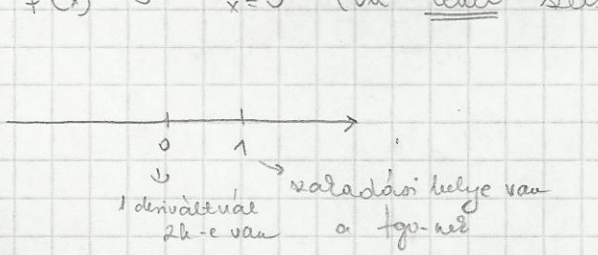
1; zérushely $\quad x = 0$;

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)^{\cancel{2}} - x^2 2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{\cancel{2x^2} - 2x - \cancel{2x^2}}{(x-1)^3} = \underline{\underline{\frac{-2x}{(x-1)^3}}}$$

$x = 0$-nál van zérushelye

ebbe kell behelyettesíteni

$f'(x) = 0 \qquad x = 0$ (ott lehet szélsőérték!)



anal II.

	$x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x>1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
2, monotonitás: f	$\searrow$ mon csökk.	helyi minimuma van a fgvnek.	$\nearrow$ mon. növ.	$\searrow$ mon csökk.

Ha a fgv 1 pontban rendelkezik valamely tulajdonsággal, az adott intervallumon $\forall$ pont rendelkezik vele.

3, konvexitás:

$$f''(x)=\frac{-2(x-1)^{\cancel{3}}-3\cancel{(x-1)}^{2}(-2x)}{(x-1)^{\cancel{6}\,4}}=\frac{-2x+2+6x}{(x-1)^4}=\underline{\underline{\frac{4x+2}{(x-1)^4}}}$$

ebbe behely. be!

$f''(x)=0$ ($\rightarrow$ ahol a 2. derivált 0, ott lehet inflexiós pont)

$-\frac{1}{2}$ $\quad$ 1

	$x<-\frac{1}{2}$	$x=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<1$	$x>1$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$
f	$\cap$ konkáv a fgv	inflexiós pont	$\cup$ konvex a fgv	$\cup$ konvex a fgv.

4, $+\infty$ és $-\infty$-ben a határérték, 0 helyen a határérték:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+1}=\underline{\underline{1}}$$

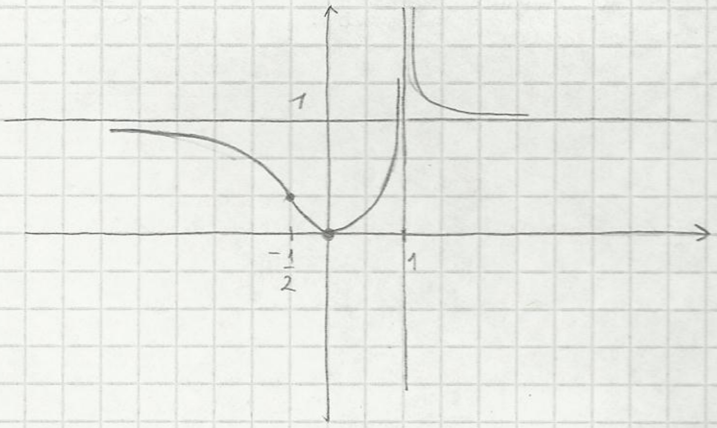
$$\Big(-\infty \qquad -\infty \qquad =\underline{\underline{1}}\Big)$$

szakadási helyen jobb- és baloldali határérték

$$\lim_{x\to1+0}\underset{\downarrow\atop 1}{x^2}\,\frac{1}{\underset{\searrow 0}{(x-1)^2}}=+\infty$$

folytonos és a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel

$$(1-0) \qquad 0 \qquad = +\infty$$



Ha a fgv tart a + v. a − ∞ -hez, akkor húzunk 1 vonalat vízszintes asszimptota

Ha a fgv.értékek tartanak a ∞-hez → függőleges asszimptota

$R_f = [0; +\infty)$
↳ értékkészlet

Pl.:

$V = 0{,}5 \, dm^3$

$F = (A) =$ minimális

$V = 0{,}5 = r^2\pi \cdot m \Rightarrow m = \frac{0{,}5}{r^2\pi}$

$F = r^2\pi + 2r\pi m = r^2\pi + 2\cancel{r\pi} \frac{0{,}5}{r^{\cancel{2}}\cancel{\pi}} = r^2\pi + \frac{1}{r}$

$F(r) = r^2\pi + \frac{1}{r}$

$F'(r) = \pi 2r + \left(-\frac{1}{r^2}\right) = \qquad r^{-1} = -1 r^{-2}$

$= 2\pi r - \frac{1}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 1}{r^2}$

$2\pi r^3 - 1 = 0$

$2\pi r^3 = 1$

$r^3 = \frac{1}{2\pi}$

$\underline{\underline{r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}}} \Rightarrow$ itt lehet szé.

Ha a 2. derivált nem 0, akkor itt szé-e van!

$F''(r) = 2\pi - \left(\frac{-2}{r^3}\right) = 2\pi + \frac{2}{r^3} > 0$

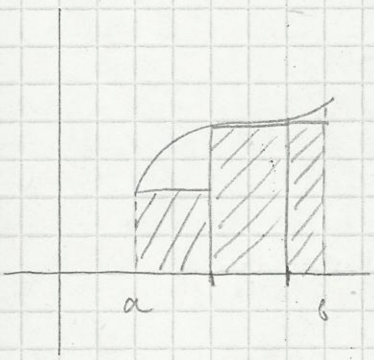
Ha az első derivált 0 és ugyanabban a pontban a 2. derivált pozitív, akkor ott helyi minimuma van.

$m = \frac{0,5}{r^2\pi} = \frac{0,5}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2\pi} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

Integrálszámítás

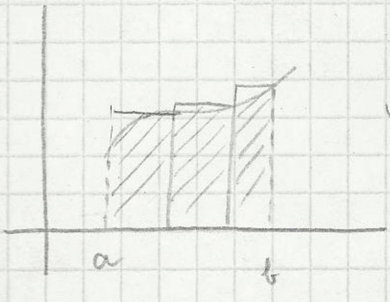
II. tétel

15



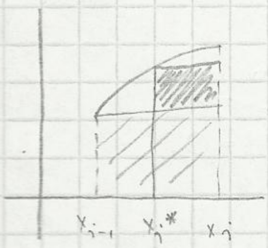
A területe: s

A fgv alatti terület: I

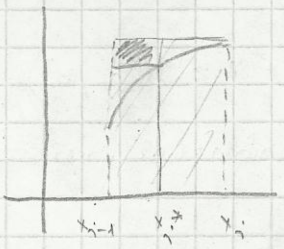


A területe: S

$s \leq I \leq S$



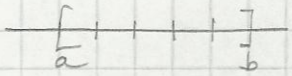
terület: s^*



terület: S^*

$s \leq s^* \leq I \leq S^* \leq S$

Def.: Legyen a és b valós számok, $a<b$, ekkor a $D \subset [a,b]$ véges halmazt az $[a,b]$ egy beosztásának nevezzük, ha $a \in D$, $b \in D$.



Mj: (1) $\mathcal{D}([a,b])$: $[a,b]$ beosztásainak a halmaza.

(2) $D \subset \mathcal{D}([a,b])$ és $D = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$

$x_0 = a$; $x_n = b$ $\quad x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$

Def.: A $D \subset \mathcal{D}([a,b])$ beosztás finomságán

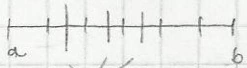
$$\|D\| = \max\{\Delta x_i \mid i = 1, \dots n\}$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

<finomság: az intervallumok beosztásának hosszúsága>

Def.: Legyenek $D_1, D_2 \subset \mathcal{D}([a,b])$.

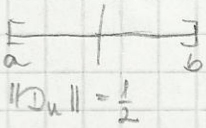
Akkor mondjuk, hogy D_1 finomítása D_2-nek, ha $D_2 \subset D_1$.

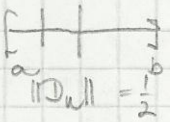


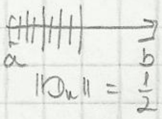
finomítás (ha még rakunk bele osztópontokat.)

A 3-olásnak nem finomítása a negyedelés

Def.: a $\langle D_n \rangle : \mathbb{N} \to \mathcal{D}([a;b])$ beosztássorozatot normális beosztássorozatnak nevezzük, ha $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$.







Def.: Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fgv.

$m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}; x_i] \}$

$M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tetszőleges

$D \in \mathcal{D}([a,b])$, $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, $S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

↓ beírt körlet összege ↓ külső körlet összege

teljességi axióma $\Rightarrow \exists$ pontos felső és alsó korlát

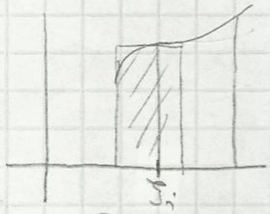
↓ folytonos.

s fgv D beosztáshoz tartozó alsó összeg

S —"— felső összeg

$\sigma(f,D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ $\quad w(f;D) = S(f;D) - s(f;D)$

oszcillációs összeg



Riemann-féle integrálközelítő összeg

Def.: Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fgv, akkor

$\underline{\int_a^b} f = \sup \{ s(f,D) \mid D \in \mathcal{D}([a,b]) \}$

$\overline{\int_a^b} f = \inf \{ S(f,D) \mid D \in \mathcal{D}([a,b]) \}$

alsó Darboux, felső Darboux integrálnak nevezzük.

x.1.

3. előadás

Def.: Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fgv.

Akkor mondjuk, hogy f fgv Riemann szerint integrálható az $[a,b]$-n, ha az f fgv Darboux-féle alsó és Darboux-féle felső integrálja egyenlő.

jel.: $\int_a^b f(x)\,dx$ → melyik változó szerint integrálunk.

a → határok; f(x) → függvény; x → változó

„határozott integrál"

Mj.: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1, \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$s(f, D) = 0 \cdot \Delta x_1 + 0 \cdot \Delta x_2 \dots + 0 \cdot \Delta x_n = 0$

D beosztáshoz tartozó alsó összege

$S(f, D) = \underbrace{1 \cdot \Delta x_1 + 1 \cdot \Delta x_2 + \dots + 1 \cdot \Delta x_n}_{\text{szakasz hosszát adja, ami 1.}} = 1$

felső összeg

⇒ ez a fgv nem integrálható.

Tétel: Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fgv. és $D_1, D_2 \in \mathcal{D}([a,b])$
↳ egy beosztása $[a,b]$-nek

és D_1 finomítása D_2-nek.

Akkor az igaz, hogy

1, $s(f, D_2) \le s(f, D_1)$ az alsó összegek nőnek

2, $S(f, D_1) \le S(f, D_2)$ a felső összegek csökkennek

3, tetszőleges $D_3; D_4 \in \mathcal{D}([a,b])$ esetén igaz, hogy

$s(f, D_3) \le S(f, D_4)$ egy alsó összeg mindig kisebb, mint a felső összeg

?

Bix.: beosztást csinálunk, és veszünk 1 plusz osztópontot. TRIV. az utolsó.

0

(3): $\underbrace{s(f, D_3) \le s(f, D_3 \cup D_4)}_{\text{a finomabb beosztással nő}} \le \underbrace{S(f, D_3 \cup D_4) \le S(f, D_4)}_{\text{a finomabb beosztással csökken}}$

*

Hf: (1), (2) $\quad$ 2200