kompakt halmazon folyt. fgv-ek:

egyenletes folytonos ✓

értékkészlet kompakt ✓ korlátosság, zárt ⇒ tsz.-kor

felveszi min és max teljességi axióma

— itt nem (de bizonyos esetekben igen)

pl.: $H \subset X$, (X, d_1) metrikus tér, H kompakt

$f: H \to \mathbb{R}$ folyt.

Differenciálhatóság

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ f diff.

Lineáris approximáció:

f diff-ható x_0-ban $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}$ $f(x) - f(x_0) = (A + \omega(x))(x - x_0)$

ω folyt
$\omega(x_0)$-ban helyettesítési értéke $= 0$

$f(x) \in \mathbb{R}$
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

csak akkor lehet általánosítani, ha $x \in \mathbb{R}$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Skaláris szorzat: kénytelen előállít elő.

$u_1 (1, 2)$ $u_2 (2, -1)$

$u_1 u_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$ ⇒ a két vektor $\perp$ egymásra

(akkor a skaláris szorzat 0)

Def: Legyen $f: H \to \mathbb{R}^n$ $H \subset \mathbb{R}$

nem valós fgv.

x_0 belső pontja H-nak, ekkor a $\Phi: H \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$, ($\Phi$: f_i)

$\Phi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ az f fgv x_0-beli differenciahányadosa.

f diffható, ha $\exists \lim_{x \to x_0} \phi_x$ határérték

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $\underline{f}: H \to \mathbb{R}^n$ és f fgv x helyen $=$
$(\underline{f}(x) =)\ (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, ahol $f_i: H \to \mathbb{R}$.

Ha f_i fgv diffható x_0-ban (x_0 belső pontja H-nak) $\forall i = 1, 2 \ldots n$
esetén $\Rightarrow$ f fgv is diffható, $\underline{f}'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_n'(x_0))$

// integrálhatóság //

Def: Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak.
Akkor mondjuk, h. az f fgv. diff-ható x_0-ban,
ha $\exists\ \underline{A} \in \mathbb{R}^n$ vektor, $\underline{\omega}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folyt fgv.
$\underline{\omega}(\underline{x_0}) = \underline{0}$ (ω x_0 helyen vett értéke 0.) úgy hogy

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x_0}) = (\underline{A} + \underline{\omega}(\underline{x}))(\underline{x} - \underline{x_0})$$

$\underline{A}$-t az fgv. diff-hányadosának nevezzük.

Tétel: Ha $H \subset \mathbb{R}^n$, $f: H \to \mathbb{R}$ x_0 belső pontja H-nak
f diff-ható x_0-ban.
$\Rightarrow$ (1) : $\underline{A}$ egyértelmű
(2) f folytonos x_0-ban

Def.: Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$, $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak.
és $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$, $|e| = 1$, ha létezik a

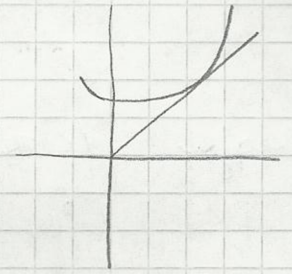
$$\lim \frac{(f(x_0) + te) - f(x)}{t}$$

határérték, akkor
ezt az f fgv x_0-beli $\underline{e}$ iránymenti deriváltjának nev.

R
O
B
I
♡
Y
O
U

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

$x - x_0 = t$



pl.: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x, y) = x^2 + 2y$ $\quad \underline{x_0} = (1, 0)$

$\underline{e}$ $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $\qquad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\underline{te}(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$

$\underline{x_0} + t \cdot \underline{e} = (1 + t\cos\alpha + t\sin\alpha)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{(1 + t\cos\alpha)^2 + 2t\sin\alpha - (1^2 + 2 \cdot 0)}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\cancel{1} + 2t\cos\alpha + t^2\cos\alpha + 2 + \sin\alpha - \cancel{1}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(2\cos\alpha + \underbrace{t\cos\alpha}_{\downarrow\, 0} + 2\sin\alpha\right) = 2\cos\alpha + 2\sin\alpha$$

Def: Ha $\bar{e}$ az $\mathbb{R}^n$-beli szokásos bázis $(\underbrace{0, 0, 0, 1, \ldots 0}_{n\text{ db}})$ akkor $\underline{e}$ iránymenti derivál-tat parciális deriváltnak nevezzük.

Jel.:

$\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0)$, $\; f'_\alpha(x_0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, $\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0)$ $\quad \left(= \dfrac{df}{dx} \right)$

görbe d

Pl.:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = x^2 + 6xy + 8$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 6y \to$ x szerinti parciáltja

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x$

Mindent, ami szerint nem deriválunk $\Rightarrow$ KONSTANS

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$, $f: H \to \mathbb{R}$ fgv., x_0 belső p. H-nak.
Ha f diffható x_0-ban $\Rightarrow$ $\forall$ x_0-beli parciális deriváltja $\exists$, és $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2} x_0 \; \dots \; \frac{\partial f}{\partial x_n} x_0\right)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = x^2 + 6xy + 8$

$P(1,1)$

$A = (2\cdot 1 + 6\cdot 1, \; 6\cdot 1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 6y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x$

Tétel: Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ $f: H \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak.
Ha f fgv-nek $\exists$ parciális deriváltjai x_0-ban és ezek folytonosak $\Rightarrow$ f diffható x_0-ban.

Mj.: Ha az f fgv. i-dik parciális derivált fgv-e diffható a j-dik változó szerint, $\Rightarrow$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$-vel jelöljük. $f''_{x,y}$

Tétel: (Schwarz)

Ha $\exists$ parciális derivált, a sorrend felcserélhető.

$$f''_{ij} = f''_{ji}$$