INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

1. **Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat az adott $\mathfrak{I}$ intervallumokon:**

(a) $\int \left(x^3 + 3\sqrt{x} + \frac{6}{x^7}\right) dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R}_+,$

(b) $\int 12\sqrt[3]{x^5} + \frac{\pi}{7\sqrt[3]{x}}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R}_+,$

(c) $\int \frac{\sqrt[4]{x} + 2x + 1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R}_+,$

(d) $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(e) $\int \frac{1}{1+49x^2}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(f) $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$

2. **Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat az adott $\mathfrak{I}$ intervallumokon:**

(a) $\int \sin x \cos x\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(b) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(c) $\int x e^{x^2}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(d) $\int x^2 \cos x^3\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(e) $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

3. **Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat az adott $\mathfrak{I}$ intervallumokon:**

(a) $\int \frac{3x}{x^2+1}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(b) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(c) $\int \frac{1}{5x \ln x}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R}_+,$ $(1, +\infty)$!

(d) $\int \frac{1}{(6x^2+6)\,\mathrm{arctg}\, x}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$ $(0, +\infty)$

(e) $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}\, dx \qquad \mathfrak{I} := (-1, 1),$ $\arcsin 0 = 0$? $(0, 1)$

(f) $\int \mathrm{tg}\, 6x\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$

(g) $\int \frac{\frac{1}{2}e^x + x}{e^x + x^2}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(h) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+5)}\, dx \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R}.$ $\mathbb{R}_+$

4. **Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat az adott $\mathfrak{I}$ intervallumokon:**

(a) $\int \frac{1}{x \log x}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R}_+,$ $\log_5 x$ ~~lnx~~ $(1, +\infty)$

(b) $\int x^2 \sqrt{x^3+7}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R}_+$

(c) $\int \frac{-x}{\sqrt[5]{x^2+3}}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(d) $\int e^x \sqrt[4]{e^x+2}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(e) $\int \left(e^{2x} + x\right) \sqrt{e^{2x} + x^2}\, dx, \qquad \mathfrak{I} := \mathbf{R},$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx, \qquad \mathcal{I} := (1, +\infty),$

(g) $\displaystyle\int \sin x \sqrt[5]{(\cos x)^6}\,dx, \qquad \mathcal{I} := \mathbf{R},$

(h) $\displaystyle\int \sin 2x \sqrt[3]{1+\sin^2 x}\,dx, \qquad \mathcal{I} := \mathbf{R}.$

5. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat a parciális integrálásra vonatkozó tétel segítségével az adott $\mathcal{I}$ intervallumokon.

(a) $\displaystyle\int x \sin x\,dx, \qquad \mathcal{I} := \mathbf{R},$

(b) $\displaystyle\int (2x+1)\,e^x\,dx, \qquad \mathcal{I} := \mathbf{R},$

(c) $\displaystyle\int (x^2+2)\,e^{1-x}\,dx, \qquad \mathcal{I} := \mathbf{R},$

(d) $\displaystyle\int -3x\cos 6x\,dx, \qquad \mathcal{I} := \mathbf{R},$

(e) $\displaystyle\int \ln 2x\,dx, \qquad \mathcal{I} := \mathbf{R}_+,$

(f) $\displaystyle\int \arcsin 3x\,dx, \qquad \mathcal{I} := \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right),$

(g) $\displaystyle\int \arctan x\,dx, \qquad \mathcal{I} := \mathbf{R},$

(h) $\displaystyle\int (x^2+1)\ln x\,dx, \qquad \mathcal{I} := \mathbf{R}_+,$

(i) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx, \qquad \mathcal{I} := \mathbf{R},$

(j) $\displaystyle\int e^{x+2}\sin x\,dx, \qquad \mathcal{I} := \mathbf{R}.$

MEGOLDÁSOK

1. (a)

$$\int x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} + 6x^{-7}\,dx = \int x^3\,dx + 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 6\int x^{-7}\,dx =$$
$$= \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{6x^{-6}}{-6} + C = \frac{1}{4}x^4 + 2\sqrt{x^3} - \frac{1}{x^6} + C$$

(b) $\displaystyle\int 12x^{\frac{5}{3}}\,dx + \frac{\pi}{7}\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^8} + \frac{3\pi}{14}\sqrt[3]{x^2} + C$

(c)

$$\int \frac{\sqrt[4]{x} + 2x + 1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{4}} + 2x + 1}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx =$$
$$= \int x^{-\frac{5}{12}} + 2x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7} + 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$$

? $\frac{1}{3}$

(d)

$$\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)+2}{x^2+1}\,dx = \int 1 + \frac{2}{x^2+1}\,dx =$$
$$= x + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C$$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+49x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(7x)^2}\,dx = \frac{1}{7}\,\mathrm{arctg}\,7x + C$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\arcsin 3x + C$

2. (a)

$$\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{-\cos 2x}{2} + C = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

?

(b) A megoldásnál felhasználjuk a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ azonosságot.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4}\int 4\sin^2 x \cos^2 x dx = \\ &= \frac{1}{4}\int (2\sin x \cos x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (\sin 2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\int 1 - \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C\end{aligned}$$

(c) $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

(d) $\int x^2 \cos x^3 dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \cos x^3 dx = \frac{1}{3}\sin x^3 + C$

(e)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x \, dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \, dx = \operatorname{tg} x - x + C\end{aligned}$$

3. (a) $\int \frac{3x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + C$

(b) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x} dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x| + C$

(c) $\int \frac{1}{5x\ln x} gx = \frac{1}{5}\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \frac{1}{5}\ln|\ln x| + C$

(d) $\int \frac{1}{(6x^2+6)\operatorname{arctg} x} dx = \frac{1}{6}\int \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\operatorname{arctg} x} dx = \frac{1}{6}\ln|\operatorname{arctg} x| + C$

(e) $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} dx = \sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x} dx = \sqrt{2}\ln|\arcsin x| + C$

(f)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} 6x \, dx &= \int \frac{\sin 6x}{\cos 6x} dx = -\frac{1}{6}\int \frac{-6\sin 6x}{\cos 6x} dx = \\ &= -\frac{1}{6}\ln|\cos 6x| + C\end{aligned}$$

(g) $\int \frac{\frac{1}{2}e^x + x}{e^x + x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2} dx = \frac{1}{2}\ln|e^x + x^2| + C$

(h) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)} dx = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+5} dx = 2\ln|\sqrt{x}+5| + C$

4. (a)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\log_5 x} dx &= \int \frac{1}{x\frac{\ln x}{\ln 5}} dx = \ln 5 \int \frac{1}{x\ln x} dx = \\ &= \ln 5 \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln 5 \ln|\ln x| + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^3+7} \, dx &= \frac{1}{3}\int 3x^2 (x^3+7)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+7)^3} + C\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{-x}{\sqrt[5]{x^2+3}} dx &= -\int x\,(x^2+3)^{-\frac{1}{5}} \, dx = \\ &= -\frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+3)^{-\frac{1}{5}} \, dx = -\frac{1}{2}\frac{(x^2+3)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C = \\ &= -\frac{5}{8}\sqrt[5]{(x^2+3)^4} + C\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int e^x \sqrt[4]{e^x+2}\,dx = \int e^x\left(e^x+2\right)^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4}{5}\sqrt[4]{\left(e^x+2\right)^5}+C$

(e)

$$\int \left(e^{2x}+x\right)\sqrt{e^{2x}+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(2e^{2x}+2x\right)\left(e^{2x}+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\left(e^{2x}+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{3}\sqrt{\left(e^{2x}+x^2\right)^3}+C$$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = \int \frac{1}{x}\left(\ln x\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{\left(\ln x\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = 2\sqrt{\ln x}+C$

(g)

$$\int \sin x\sqrt[5]{\left(\cos x\right)^6}\,dx = -\int -\sin x\left(\cos x\right)^{\frac{6}{5}}\,dx =$$
$$= \frac{\left(\cos x\right)^{\frac{11}{5}}}{\frac{11}{5}}+C = \frac{5}{11}\sqrt[5]{\left(\cos x\right)^{11}}+C$$

(h)

$$\int 2\sin x\cos x\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C =$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\sin^2 x\right)^3}+C$$

$\frac{1}{3}$

5. (a) A parciális integrálásra vonatkozó tétel felhasználásával és az $f(x)=x, g'(x)=\sin x$ választással a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\int x\sin x\,dx = x\left(-\cos x\right)+\int \cos x\,dx = -x\cos x+\sin x+C.$$

(b) A parciális integrálásra vonatkozó tétel felhasználásával és az $f(x)=2x+1, g'(x)=e^x$ választással a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\int (2x+1)\,e^x\,dx = (2x+1)\,e^x - \int 2e^x\,dx =$$
$$= (2x+1)\,e^x - 2e^x + C.$$

(c) A parciális integrálásra vonatkozó tétel kétszeri felhasználásával, először az $f(x)=x^2+2, g'(x)=e^{1-x}$, majd a következőben az $f(x)=x, g'(x)=e^{1-x}$ választással a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\int \left(x^2+2\right)e^{1-x}\,dx = \left(x^2+2\right)\left(-e^{1-x}\right)+2\int xe^{1-x}\,dx =$$
$$= \left(x^2+2\right)\left(-e^{1-x}\right)+2\left(x\left(-e^{1-x}\right)-\int -e^{1-x}\,dx\right) =$$
$$= -\left(x^2+2\right)e^{1-x}-2xe^{1-x}-2e^{1-x}+C.$$

(d) A parciális integrálásra vonatkozó tétel felhasználásával és az $f(x)=-3x, g'(x)=\cos 6x$ választással a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\int -3x\cos 6x\,dx = -\frac{1}{2}x\sin 6x - \int -\frac{1}{2}\sin 6x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}x\sin 6x - \frac{1}{12}\cos 6x + C.$$

(e) A parciális integrálásra vonatkozó tétel felhasználásával és az $f(x)=\ln 2x, g'(x)=1$ választással a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\int \ln 2x\,dx = x\ln 2x - \int 1\,dx = x\ln 2x + x + C.$$

(f) A parciális integrálásra vonatkozó tétel felhasználásával és az $f(x) = \arcsin 3x, g'(x) = 1$ választással a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\int \arcsin 3x dx = x \arcsin 3x - 3 \int x \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx =$$
$$= x \arcsin 3x - 3 \int x \left(1 - 9x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx =$$
$$= x \arcsin 3x + \frac{3}{18} \int -18x \left(1 - 9x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx =$$
$$= x \arcsin 3x + \frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2} + C.$$

(g) A parciális integrálásra vonatkozó tétel felhasználásával és az $f(x) = \operatorname{arctg} x, g'(x) = 1$ választással a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1} dx =$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left|x^2+1\right| + C.$$

(h) A parciális integrálásra vonatkozó tétel felhasználásával és az $f(x) = \ln x, g'(x) = x^2 + 1$ választással a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\int \left(x^2+1\right) \ln x \, dx = 2x \ln x - \int 2 \, dx = 2x \ln x - 2x + C.$$

(i)

A parciális integrálásra vonatkozó tételt kétszeres alkalmazásával kapjuk az
Legyen először $f(x) = e^{2x}$ *és* $g'(x) = \sin 3x$, *majd* $f(x) = e^{2x}$ *és* $g'(x) = \cos 3x$,

$$I = \int e^{2x} \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{1}{6} \int e^{2x} \cos 3x \, dx = -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int\right.$$
$$= -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{1}{18}e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{9} \int e^{2x} \sin 3x \, dx$$

Az előző egyenlőségekből az $I = -\frac{1}{3}e^{2x} \cos 3x + \frac{1}{18}e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{9}I$ *egyenlőséget kapj*

$$I = -\frac{3}{10}e^{2x} \cos 3x + \frac{1}{20}e^{2x} \sin 3x + C$$

37

Az előző feladathoz hasonlóan oldjuk meg.

$$I = \int e^{x+2} \sin x \, dx = -e^{x+2} \cos x + \int e^{x+2} \cos x \, dx = -e^{x+2} \cos x + e^{x+2} \sin x - \int e^{x+2} \sin x \, dx$$
$$I = -\frac{1}{2}e^{x+2} \cos x + \frac{1}{2}e^{x+2} \sin x + C$$