1. előadás

Ism. Hk: 19-21 fejezet. II. 9.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad d(x,y) := |x-y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ távolság $\mathbb{R}^n$-ben

$|x| := \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ vektor

Minkowski egyenlőtlenség : egy norma kisebb mint két vektor normájának az összege.

↓

3. tulajdonság

Def.: ! (X, d) metrikus tér, $H \subset X$, H átmérője : $\operatorname{diam} H := \begin{cases} 0, & H = \emptyset \\ \sup\{d(x,y) : x, y \in H\} \end{cases}$ *

Metrikus tér lehet: $X := [0,1) \cup (3,5) \cup [7,9]$

$d(x,y) := |x-y|$ → távolságot így értjük

Csak a metrikus tér elemei lehetnek a környezetben

$S_1(0) = [0,1)$ → már nem $2r$ a sugara

↓

és a halmaz ebben a metrikus térben nyílt és zárt is, míg a valós számok halmazán nem nyílt, nem zárt

Üreshalmaz és alaphalmaz nyílt és zárt is.

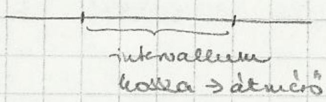
Alterbeli környezet → elmetsszük a környezetet az altérrel.

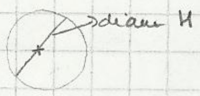
1 hosszú intervallumba sűrítettük be a valós számokat.

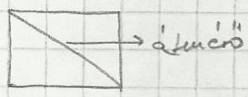
$d_1(x,y) := \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ → bármely szám esetén 1-nél kisebb, mert nagyobb a nevező, mint a számláló.

Eszerint a metrika szerint is konvergensek a sorozatok, csak más gyorsabb a konvergencia.

Minden halmaz korlátos, mert a tér átmérője ≤ 1, nem lehet nagyobb, mert 1-nél nagyobb számok nem szerepelnek benne.







* H korlátos, ha diam $H < +\infty$

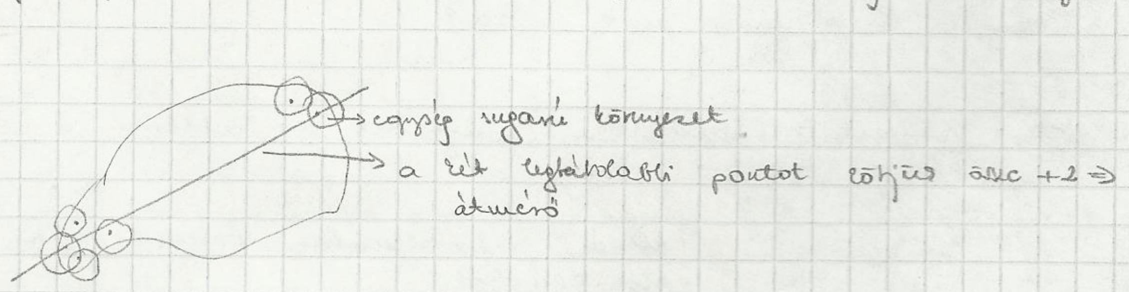
Diszkrét metrikus tér:

$d: X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

- Itt az egység sugarú környezet egyelemű halmaz, mert x_0-tól minden pont egységnyire van. ⇒ NYÍLT
- A halmaz korlátos
- Az egyelemű halmaz átmérője 0, a többelemű 1.
- Csak a konstans sorozatok konvergensek. (Egy bizonyos tagtól kezdve konstansok, mert a távolság vagy 0 vagy 1.

- A kompaktságból következik a korlátosság, és a zártság is belátható.



A kompaktság a végesség általánosítása.

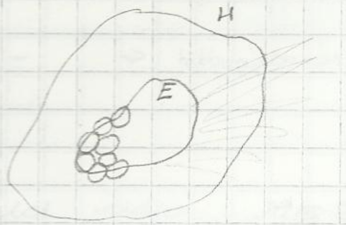
Nem igaz a Bolzano-Weierstrass tétel sem diszkrét metrikus térben.

A kompaktság független a környező tértől. Példában: [7,9] kompakt.

A [0,1), (3,5) nem kompakt itt sem.

· $1-\frac{1}{n}$ értékkészlete korlátos, de nincs torlódási pontja a $[0,1)$ intervallumban. Egy torlódási pontja van, az 1, de az nincs benne az intervallumban.

· Kompakt halmaz minden részhalmaza kompakt.



$E \subset H$

$\downarrow$ zárt $\searrow$ kompakt

lefedjük az E-t nyílt halmazokkal, majd lefedjük E komplementerét, ami lefedi H-t is. $\Rightarrow$ lefedi az E-t is $\Rightarrow$ véges

· kompakt halmaz minden részhalmazának $\exists$ torlódási pontja.

Összefüggőség:

Def.: Az (X,d) metrikus tér összefüggő, ha nem léteznek olyan $G_1, G_2 \subset X$ nem üres, nyílt, diszjunkt halmazok, melyekkel $X = G_1 \cup G_2$. Nem lehet felbontani a teret két üres, nyílt, diszjunkt részre.

$H \subset X$ összefüggő, ha a (H,d) altér összefüggő.

Síkon:

> zárt, diszjunkt, üres

Altérben: nem összefüggő halmazok

Tétel: Legyen (X,d) metrikus tér, (Y,d) az (X,d) altere és $X \subset Y$.

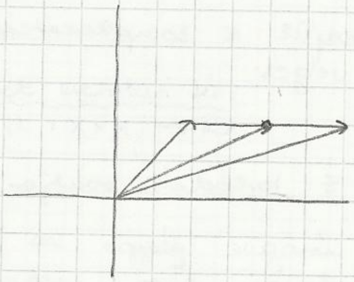
1., H nyílt (Y,d)-ben $\Leftrightarrow \exists\, G \subset X$, amely nyílt (X,d)-ben és $H = G \cap Y$.

2., H zárt (Y,d)-ben $\Leftrightarrow \exists\, G \subset X$, amely zárt (X,d)-ben és $H = G \cap Y$.

Pl.: $Y = [0,1) \cup (3,5) \cup [7,9]$
$\Downarrow$
Van olyan halmaz, amelyet elmetszve az altérrel ezt kapjuk $\Rightarrow$ nyílt.

Tétel: $(\mathbb{R}, d)$-ben csak az üreshalmaz, az egyelemű halmazok és az intervallumok összefüggők.

$\{a + t(b-a) : t \in [0,1]\}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}^n$

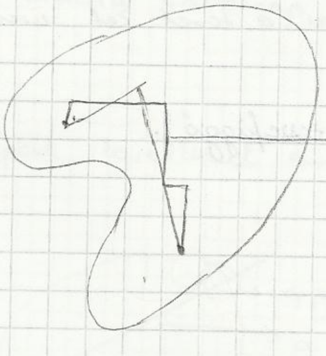


KÖZÉPISKOLÁS (adott arányban osztunk egy szakaszt)

$\Rightarrow$ ezek egyesítését nevezik törött vonalnak (POLIGON). Ha zárt $\Rightarrow$ sokszög

Tétel: $(\mathbb{R}^n, d)$-ben egy nyílt halmaz $\Leftrightarrow$ összefüggő, ha $\forall$ két pontja összeköthető a halmazban haladó poligonnal.

A konvex halmazok összefüggők.



$\rightarrow$ $\parallel$-az valamelyik tengellyel.

Def.: (X, d) metrikus tér, $H \subset X$, H tartomány, ha nyílt és összefüggő.

Az egyszerű összefüggőség szűkebb, mint az összefüggőség.

2. előadás

11.16.

A keresett fgv mellett az adott fgv deriváltjai is előfordulnak.

· Közönséges diffegyenletek ⇒ egyváltozós fgv az ismeretlen

· Parciális —"— ⇒ többváltozós fgv —"—

Def.: A diffegyenlet rendje : Melyik a legmagasabb előforduló derivált ⇒ innen tudjuk megállapítani.

(Milyen magas az előforduló derivált rendje)

Alapneveti csop:

a, lineáris

b, speciális alakúak

Pillanatnyi sebesség út-idő fgv első deriváltja } fizikában szükség volt rá
gyorsulás út-idő fgv 2. deriváltja } korán

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

↳ cosinus hiperbolikusz

Kósa András : Differenciálegyenletek (Eötvös) ELTE jegyzet

Pontyagin : Közönséges diffegyenletek

Elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenletek

Def.: Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos,
↳ nem esik szét darabokra

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum.

A $\varphi : I \to \mathbb{R}$ valós értékű fgv megoldása az

(I) (1) $y'(x) = f(x, y(x))$ — identitás; összetett fgv — valós változós valós fgv ⇒ FOLYTONOS

közönséges elsőrendű explicit diffegyenletnek, ha

a., φ folytonosan differenciálható

b., $\varphi \subset T$, azaz $(x, \varphi(x)) \in T \quad \forall x \in I$ esetén

c., $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in I$ — ha behelyettesítünk, van megoldás

Legyen $(\xi, \eta) \in T$ (ξ: kszi, η: éta). A $\varphi : I \to \mathbb{R}$ megoldása az

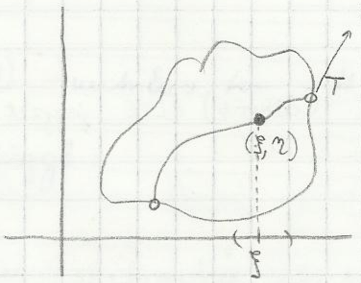
(II) (II.) $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(\xi) = \eta$

(I)-re vonatkozó kezdeti érték problémának (Cauchy-feladat),

ha φ-re teljesül a, b, c tulajdonság, továbbá

d., $\xi \in I$ és $\varphi(\xi) = \eta$

A kezdeti érték problémától várható, h egyértelmű a megoldás



határtól-határig tartó megoldás. (nem léphet ki)

x halmazra eső vetülete nyílt intervallum ⇓ ezek összefüggőek

mivel a tartomány nyílt ⇒ a vetülete is nyílt

Ha a hozzárendelés nem változik, csak az ért tart ⇒ más megoldásai lennének (mert lényeges tulajdonságai megváltozhatnak)

4

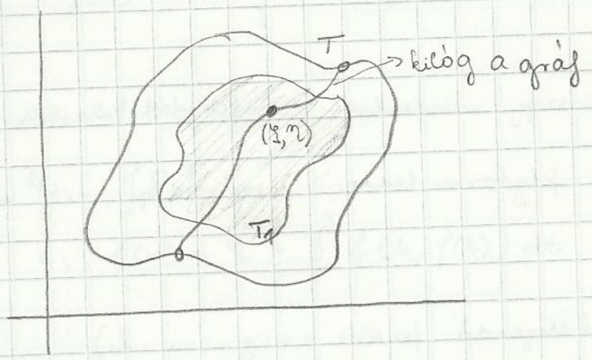
diffe: differenciálegyenlet

Def.: $f: J \to \mathbb{R}$ fgv teljes megoldása (I).-nek ill. (II)-nek, ha megoldása, és nincs olyan valódi kiterjesztése, amely megoldása (I).-nek ill. (II)-nek.

A teljes megoldás -> a legbővebb megoldáshalmaz, ettől már nincs nagyobb.

Vesszük az alsó végpontok pontos alsó korlátját, a felső végpontok pontos felső korlátját -> megoldás halmaza.

Def.: A (II.) egy $f: J \to \mathbb{R}$ megoldása T-ben határtól határig halad, ha $\forall\ T_1 \subset T$ kompakt halmaz esetén $\exists\ x_1, x_2 \in J$, amelyekre $x_1 < \xi < x_2$, és $(x_1, f(x_1)) \notin T_1$ és $(x_2, f(x_2)) \notin T_1$.



(III)

Tétel: Legyen $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f_1 : J \to \mathbb{R}$ folytonos, $T := J \times \mathbb{R}$ „y tengellyel ‖ sáv”, $(\xi, \eta) \in T$.

nem mindig fontos, h. nyílt intervallum legyen

A (III). $y'(x) = f_1(x)$, $y(\xi) = \eta$ kezdeti érték probléma teljes megoldása a

konstans, deriváltja: 0.

$$f: J \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \eta + \int_\xi^x f_1(t)\,dt \quad \text{fgv}$$

és (III). nincs más teljes megoldása.

BIZ.: Hf.

$f: T \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = f_1(x)$

→ kétváltozós, de csak az első változótól függ.

Tétel: Legyen $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f_2: J \to \mathbb{R}$ folytonos, $f_2(y) \neq 0$ $\forall y \in J$, $T := \mathbb{R} \times J$, $(\xi, \eta) \in T$.

A $f: J_1 \to \mathbb{R}$ ($J_1 \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum) $\Leftrightarrow$ megoldása a

(IV) (IV). $y'(x) = f_2(y(x))$, $y(\xi) = \eta$

Kezdeti érték problémának, ha inverze megoldása az

(V) (V). $x'(y) = \dfrac{1}{f_2(y)}$, $x(\eta) = \xi$ kezdeti érték problémának.

BIZ.: Hf.

feltétel f_2 sehol nem 0 az intervallumon

f mego -az egyenletnek

$f'(x)$ sehol nem 0 $\Rightarrow$ vagy mindenhol $\oplus$ v. $\ominus$ Darboux-tétel

<úgy viselkedik, mintha folytonos lenne>, $\Rightarrow$ vagy szig mon nő v.

szig mon csökken

⇓

invertálhatóság (elegendő feltétel a szig mon-ás)

⇓

ha I intervallumon ért fgv, x_0-ban diff és nem 0 ott, az inverz fgv deriváltja = az eredeti fgv reciprokával
(VISSZAFELÉ IS IGAZ) ha az eredeti $y(\xi) = \eta$ $\Rightarrow$ az inverze $y(\eta) = \xi$

(V.) a diff egyenlet jobb oldala a változótól függ $\to$ integrál fgv segítségével fel lehet írni a teljes megoldást

(V) teljes megoldása: $\varphi: J \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) = \xi + \int_{\eta}^{y} \frac{1}{f_2(t)}\,dt$
meg kell határozni az értékkészletét $\to$ és egy intervallum

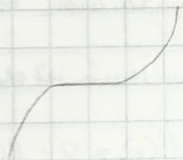
H halmazon, ha f fgv szig mon, az inverze is szig mon
Bolzano-t. köv.: a fgv értékkészlete intervallum $\Rightarrow$ az inverz értékkészlet is intervallum

A fgvt és az inverzét egymásba helyettesítve $\to$ identitás fgv
vagy az ért tart. v. az értékkészlet
függ a sorrendtől

$T := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $y'((x)) = \sqrt{|y(x)|}$ $y(\xi) = \eta$

A jobb oldal csak a második változótól függ

A tengelyen lehet megoldást keresni + alsó és felső félsíkon vizsgáljuk a megoldást.



3. előadás

11. 23.

Def.: ! $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos, $(\xi, \eta) \in T$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. $\Big\}*$ (VI)

A $\varphi : I \to \mathbb{R}$ megoldása a

$(\overline{VI})$. $y(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y(t))\,dt$ integrálegyenletnek,

ha

a, φ folytonos

b, $\varphi \subset T$

c, $\varphi(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, \varphi(t))\,dt \quad \forall\, x \in I. \quad (\xi \in I)$

Tétel: φ megoldása (II)-nek $\Leftrightarrow$ φ megoldása (VI)-nak.

feltétel: ua def-nál

BIZ.:

„$\Rightarrow$" b, mind a kettőben benne van $\forall$ a

a, φ folytonosan diff $\Rightarrow$ folytonos

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \Rightarrow \varphi(x) = \int_\xi^x f(t, \varphi(t))\,dt + c$$

$$\varphi(\xi) = \eta \Rightarrow \underbrace{c = \eta}_{\Downarrow \text{ c. tulajdonság}}$$

„$\Leftarrow$"

$g : I \to \mathbb{R}^2$, $g(t) := (t, \varphi(t))$ folytonos

$R_g \subset D_f = T$

$\Downarrow$ g ért. t. $\Downarrow$ f ért. tart.

f folytonos $\Rightarrow$ $f \circ g$ folytonos

c.)-ben szereplő fgv folytonos ($f \circ g : I \to \mathbb{R}$)

$\downarrow$

intervallumon értelmezett valós fgv.

c.) alapján + integrálfgv-re vonatkozó tételből

$\Downarrow$

f diff-ható és $f'(x) = 0 + f(x, f(x))$

$\Downarrow$

folytonosan diff-ható

$\Downarrow$

f' folyt.

c.)-ből : $f(\xi) = \eta$

(x helyébe ξ-t írva $\int_\xi^\xi = 0 \Rightarrow f(\xi) = \eta$)

Picard-féle szukcesszív approximáció:

$\downarrow$ sorozatos $\qquad$ $\downarrow$ megközelítés

Def.: * (g_0) $\xi \in I$.

$$f_n : I \to \mathbb{R}, \quad f_0(x) := \eta, \quad f_n(x) := \eta + \int_\xi^x f(t, f_{n-1}(t))\, dt$$

$(n = 1, 2, \dots)$

Feladat:

$T := \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad y'(x) = x\, y(x), \quad y(0) = 1.$

$$y'(x) = f_1(x) f_2(y(x))$$

$$\Big(\big(\underbrace{\textstyle\int \frac{1}{f_2(t)}\, dt}_{}\big) \circ f\Big)\, x = \int f_1(x)\, dx$$

vesszük az inverz fgv-ét

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_0(x) := 1$