$$f_1(x) = 1 + \int_0^x t \cdot 1 \, dt = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x t \cdot \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4}$$

$$f_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$\to \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Indukciós feltevés:

$$\left(\text{exp. fgv}: \ \sum \frac{x^k}{k!}\right)$$

$$f_n(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^k \cdot k!}$$

$$f_{n+1}(x) \quad 1 + \int_0^x t \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{2^k k!}\right) dt = 1 + \sum_{k=0}^{n} \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{2^k k!} dt = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+2}}{2^k k! \, (2k+2)} =$$

$$= \underbrace{1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2(k+1)}}{2^{k+1}(k+1)!}}_{} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^{2k}}{2^k k!}$$

↳ emiatt nem $k = 1$-től

$$\sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{2^n n!} \Rightarrow \text{hatványsor (a páratlan kitevőkre az értéke mind 0.)}$$

$$= \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}$$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \to \text{teljes megoldása a kezdetiérték problémának.}$$

Tétel: (Peano)

Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány és $f: T \to \mathbb{R}$.

Ha f folytonos $\Rightarrow$ (11)-nek minden $(\xi, \eta) \in T$ esetén $\exists$ megoldása.

BIZ.: NEM KELL!

Def.: ! $T \subset \mathbb{R}^2$, $f: T \to \mathbb{R}$, $T_1 \subset T$.

1, f a második változójában lokális Lipschitz-feltételnek tesz eleget T_1-en, ha $\forall (x_0, y_0) \in T_1$ esetén $\exists\, r, L \in \mathbb{R}_+$, hogy $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L |y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in$ $\in S_r((x_0, y_0)) \cap T_1$ esetén.

2, f a második változójában globális Lipschitz-feltételnek tesz eleget T_1-en, ha $\exists\ L \in \mathbb{R}_+$, hogy

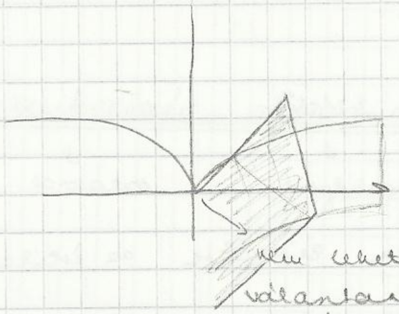
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le \underset{\downarrow}{L}\, |y_1 - y_2| \quad \forall\ (x,y_1),(x,y_2) \in T_1.$$

minél nagyobb, annál meredekebb a sík (nem változik az alatta lévő görbe túl gyorsan)

— o —

$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $f(x,y) := \underset{\substack{\downarrow\\ \text{folytonos}}}{\sqrt{|y|}}$

a 2. változója nem tesz eleget a Lipschitz-feltételnek.

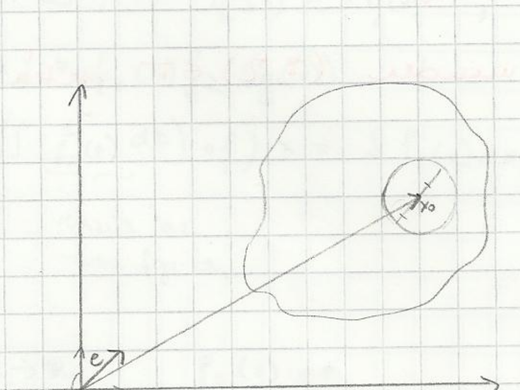


abszolútértékes $\sqrt{\ }$ fgv.-e $\quad \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad \sqrt{x} = c\cdot x$

nem lehet olyan nagy meredekségű egyenest választani, ami nem megy bele a görbébe
Egy egész sávot ki kell venni, h. eleget tegyen a Lipschitz-feltételnek.

$$|f(0,0) - f(0,y)| = \sqrt{|y|} \le L\,|y-0| \iff \frac{1}{\sqrt{|y|}} \le L \quad ↯$$

a fgv-nek a $+\infty$-ben vett értéke $+\infty$. (Már az x tengely közelében „elromlik" a feltétel)



$$\frac{f(x_0+te) - f(x_0)}{\underset{\downarrow}{t}}$$

milyen távol van a e az x_0 ponttól

parciális derivált irányvektora

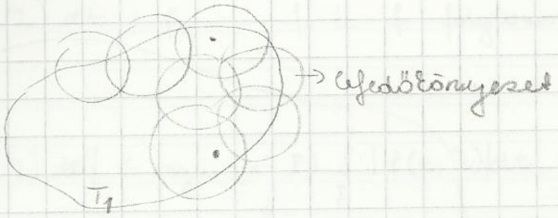
Megj.: $T \subset \mathbb{R}$ tartomány, $f: T \to \mathbb{R}$ folytonos

1., Ha $\exists\ \partial_2 f$ és $\partial_2 f$ folytonos $\Rightarrow$ lok. Lipschitz

f a 2. változójával a lok. Lipschitz feltételnek tesz eleget.

2., Ha $\exists\ \partial_2 f$ és $\partial_2 f$ korlátos $\Rightarrow$ glob. Lipschitz

3., Ha f a 2. változójában lokális Lipschitz-feltételnek tesz eleget T-n $\Rightarrow$ a T $\forall$ T_1 kompakt részhalmazán globális Lipschitz-feltételnek tesz eleget.



Feladat:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\exists L, \alpha \in \mathbb{R}$, h. $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$\alpha = 1$ egyenletesen folyt. ($\forall \alpha$ esetén folytonos)

$\alpha > 1$ konstans fgv.

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\right| \leq L|x-y|^{\alpha - 1}$$

Erős a feltétel!

4. előadás

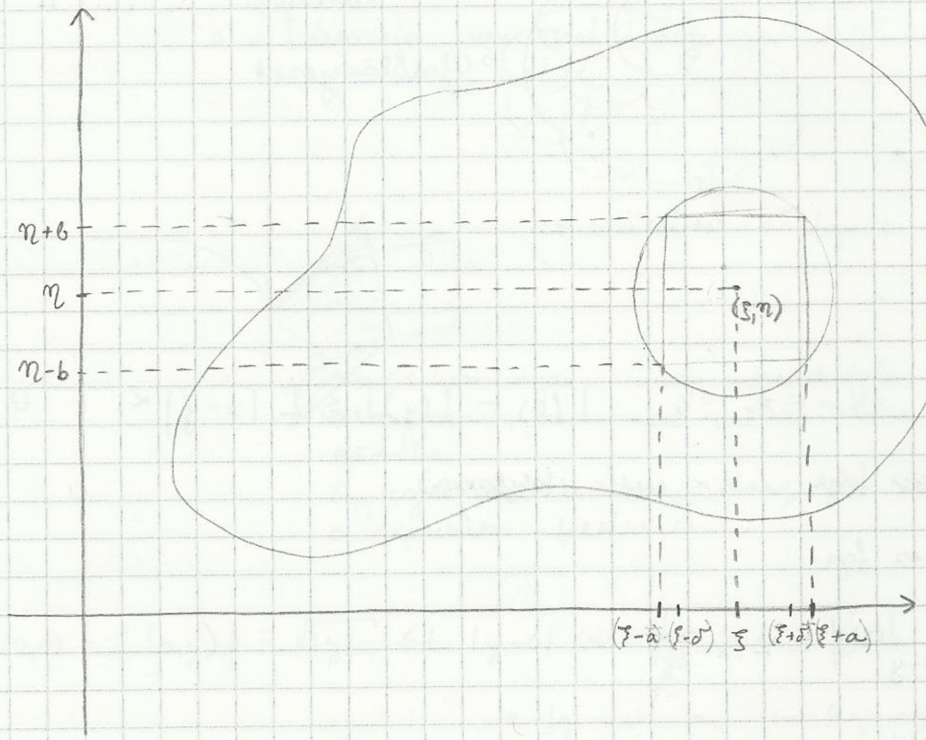
III. 1.

Picar-Lindelöf-féle egzisztencia-unicitás tétel:

Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány és $f: T \to \mathbb{R}$ folytonos. Ha f a második változójában lokális Lipschitz-feltételnek tesz eleget T-n, akkor a (1) kezdetiérték problémának minden $(\xi, \eta) \in T$ esetén egyértelműen létezik teljes megoldása, amely T-ben határtól határig halad.

Tétel: Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány és $f: T \to \mathbb{R}$ folytonos. Ha f a második változójában lokális Lipschitz-feltételnek is eleget T-n, $\Rightarrow \forall (\xi, \eta) \in T$ esetén $\exists\, \sigma \in \mathbb{R}_+$, hogy a $f_n: [\xi-\sigma, \xi+\sigma] \to \mathbb{R}$, $f_0(x) := \eta$, $f_n(x) := \eta + \int_\xi^x f(t, f_{n-1}(t))\,dt$ $(n = 1, 2 \dots)$ fgv-sorozat egyenletesen konvergens és határfgv-e $(\xi-\sigma, \xi+\sigma)$-n megoldása (U1)-nak és így (II)-nek.

BIZ.:



1.,

- Legyen $(\xi, \eta) \in T$.
- $\exists\, r \in \mathbb{R}_+$, hogy $S_r((\xi,\eta)) \subset T$ és $\exists\, L \in \mathbb{R}_+ : |f(x,y_1) - f(x-y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in S_r((\xi, \eta))$
- Legyenek $a, b \in \mathbb{R}_+$ olyanok, hogy

$$\mathcal{R} := \{(x,y) : |x-\xi| \leq a,\ |y-\eta| \leq b\} \subset S_r((\xi,\eta)).$$

↳ téglalap v. zárt intervallum $\mathbb{R}^2$-ben

- Érvényes a Heine-Borel tétel:

korlátos, mert az átmérője $\leq 2r$ (szuprémumot véve)

zárt $\Rightarrow$ komplementere nyílt

⇓

$\mathcal{R}$ kompakt, f folytonos ($\Rightarrow |f|$ is folytonos) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ K \in \mathbb{R}_+,$ hogy $|f(x,y)| \le K \quad \forall\ (x,y) \in \mathcal{R}.$ → nem R

Legyen $\delta := \min\{a, \frac{b}{K}\}$.

$\langle f_n \rangle$ egyenletesen konvergens $\Leftrightarrow f_0 + \sum_1^\infty (f_n - f_{n-1})$ egyenletesen konvergens.

$(s_n = f_n)$

2., A f_n fgv-ek folytonosak és $f_n \subset \mathcal{R} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

f_0 folytonos (mivel konstans) és $f_0 \subset \mathcal{R}$.

$f_1(x) = \eta + \int_\xi^x (t, \eta)\, dt : f_1 \quad f_0$ és f folytonossága miatt folytonos

$$|f_1(x) - \eta| = \left| \int_\xi^x f(t,\eta)\, dt \right| \le \operatorname{sign}(x-\xi) \int_\xi^x |f(t,\eta)|\, dt \le$$

ha $>1 \Rightarrow$ az igazi integrálás
ha $<1 \Rightarrow$ felcseréltük a határokat és (-1)-gyel szoroztuk

$$\le \operatorname{sign}(x-\xi) \int_\xi^x K\, dt = \operatorname{sign}(x-\xi)\, K(x-\xi) = K|x-\xi| \le K\delta \le b$$

mivel zárt intervallumban van

$\forall\ x \in J_0 := [\xi - \delta, \xi + \delta]$. $\quad$ (Szabálya, ld. $f_1(x)$ és η eltérése $\le b$) $\Rightarrow f_1 \subset \mathcal{R}$

Indukciós feltevés:

f_n folytonos és $f_n \subset \mathcal{R}$. $\Rightarrow f_{n+1}$ folytonos

$$|f_{n+1}(x) - \eta| = \left| \int_\xi^x f(t, f_n(t))\, dt \right| \le \operatorname{sign}(x-\xi) \int_\xi^x |f(t, f_n(t))|\, dt \overset{f_n \subset \mathcal{R}.}{\le}$$

$$\le \operatorname{sign}(x-\xi) \int_\xi^x K\, dt = K|x-\xi| \le b \Rightarrow f_{n+1} \subset \mathcal{R}.$$

3.,

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \left| \int_\xi^x f(t,\eta)\, dt \right| \le K|x-\xi| \le K\delta \qquad \forall\ x \in J_0$$

$$|f_2(x) - f_1(x)| = \left| \int_\xi^x f(t, f_1(t)) - f(t,\eta)\, dt \right| \le \operatorname{sign}(x-\xi) \int_\xi^x |f(t, f_1(t)) - f(t,\eta)|\, dt \le$$

$$\le \operatorname{sign}(x-\xi) \int_\xi^x L|f_1(t) - \eta|\, dt \le \operatorname{sign}(x-\xi) \int_\xi^x LK|t-\xi|\, dt \le LK\frac{|x-\xi|^2}{2} \le LK\frac{\delta^2}{2}$$

$\forall\ x \in J_0$

Indukciós feltevés: $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \le \frac{K}{L}\frac{(L\delta)^n}{n!} \qquad \forall\ x \in J_0$

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le \operatorname{sign}(x-\xi) \int_\xi^x |f(t, f_n(t)) - f(t, f_{n-1}(t))|\, dt \le$$

$$\le \operatorname{sign}(x-\xi) \int_\xi^x L\,|f_n(t) - f_{n-1}(t)|\, dt \le \operatorname{sign}(x-\xi) \int_\xi^x L\frac{K}{L}\frac{L^n}{n!}|t-\xi|^n\, dt =$$

Lipschitz-felt. $\qquad$ Indukciós feltevés

$= \operatorname{sign}(x-\xi)\frac{K}{L}L^{n+1}\frac{(x-\xi)^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{K}{L}\frac{(L\sigma)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall x \in I_0$

$\sum_1^\infty \frac{K}{L}\frac{(L\sigma)^n}{n!}$ konvergens $\left(\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{K}{L}\frac{(L\sigma)^n}{n!}} = \overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{K}{L}}\frac{L\sigma}{\sqrt[n]{n!}} = 0 < 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_0 + \sum_1^\infty (f_n - f_{n-1})$ egyenletesen konvergens $\Rightarrow \langle f_n \rangle$ egyenletesen konv.

Weierstrass-tétel
(v. kritérium)

Legyen $f: I_0 \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

f folytonos és $f \subset R$.

$|f(x) - \eta| = |\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) - \eta| = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - \eta| \le b \quad \forall x \in I_0$

(Beláttuk, h. a fgv folytonos és a gráfja a téglalapban van)

——— o ———

Legyen $g_n: I_0 \to \mathbb{R}$ $\quad g_n(x) := f(x, f_n(x)) \quad (n = 0, 1 \ldots)$

Állítás: $\langle g_n \rangle$ egyenletesen konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x, f(x))$

III.8.

5. előadás

$|g_n(x) - g_m(x)| = |f(x, f_{n-1}(x)) - f(x, f_{m-1}(x))| \overset{\text{Lipschitz-felt}}{\le} L\,|f_{n-1}(x) - f_{m-1}(x)| \quad \forall x \in I_0$

(Cauchy-kritérium → egyenletes konv, $N(\varepsilon) := N_1\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)$)

— o —

egyenletes konv. def. felhasználva:

$|f_{n+1}(x) - \eta| < b \quad \forall x \in I_0 \Rightarrow |f(x) - \eta| \le b \quad \forall x \in I_0 \Rightarrow f \subset R \Rightarrow$

$\Rightarrow |\underbrace{f(x, f_n(x))}_{\text{sorozattag}} - \underbrace{f(x, f(x))}_{\text{fgv}}| \le L\,|f_n(x) - f(x)| \quad \forall x \in I_0$

$\langle f_n \rangle$ egyenletesen konvergál f-hez $\Rightarrow \exists\, N_1(\varepsilon/L) \in \mathbb{R}$: ha

$n > N_1(\varepsilon/L) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{L} \quad \forall x \in I_0$. Legyen $N(\varepsilon) :=$

$= N_1(\varepsilon/L)$. Ha $n > N(\varepsilon) \Rightarrow |f(x, f_n(x)) - f(x, f(x))| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon \quad \forall x \in I \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle g_n \rangle$ egyenletesen konvergál a $g: I \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x, f(x))$ fgv-hez.

határfgv-e

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\eta + \int_\xi^x f(t, f_{n-1}(t))\,dt\right) = \eta + \lim_{n\to\infty}\int_\xi^x f(t, f_{n-1}(t))\,dt =$$

$$= \eta + \int_\xi^x \left(\lim_{n\to\infty} f(t, f_{n-1}(t))\right) dt = \eta + \int_\xi^x f(t, f(t))\,dt \quad \forall x \in J_0$$

azaz f megoldása (VI.)-nak és így (II.)-nek.

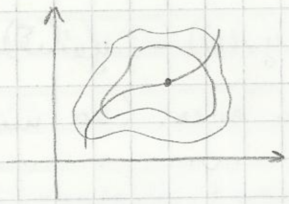
~ ∘ ~

$$|f(x) - f^*(x)| = \left| \int_\xi^x \left(f(t, \varphi(t)) - f(t, \varphi^*(t))\right) dt \right|$$

felső becslés

a megoldások közös részén és így teljesül, ha $\varphi(x) = \varphi^*(x)$

akárhogyan választunk tartományt (halmazt), mindig kilóg a fgv-gráfja



Lipschitz-feltétel

Elsőrendű, közönséges, explicit differenciálegyenlet-rendszerek

Def.: Legyen $T \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ tartomány

↳ y egy vektor → 2változós de.-eket kerüljük

$f: T \to \mathbb{R}^n$ folytonos, $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $(\xi, \underline{\eta}) \in T$,

$\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ megoldása az

(VII.) $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(\xi) = \eta$ (VII)

elsőrendű, közönséges, explicit differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-problémának, ha

a., f folytonosan differenciálható

b., $\varphi \subset T$ azaz $(x, \varphi(x)) \in T \quad \forall x \in J$

c., $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in J$,

d., $\xi \in J \quad \varphi(\xi) = \eta$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\left(\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0}, \dots \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right) \rightarrow \text{vektor}$$

$$f:=(f_1, \dots f_n)$$

Vektorértékű fgv folytonos $\Leftrightarrow$, ha a koordinátafgv. folytonos

$y:=(y_1, \dots y_n)$ $f:=(f_1, \dots f_n)$ $(f_i : T \to \mathbb{R})$

$\eta:=(\eta_1, \dots, \eta_n)$

$$(\text{VII}')\begin{cases} y_1'(x)=f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), & y_1(\xi)=\eta_1 \\ \vdots \\ y_i'(x)=f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), & y_i(\xi)=\eta_i \\ \vdots \\ y_n'(x)=f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), & y_n(\xi)=\eta_n \end{cases}$$

Megoldása egy rendezett fgv n-es. (ha mindegyik φ fgv folytonosan diff-ható)

A $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ fgv-n-es, $\varphi_i : J \to \mathbb{R}$ $(i=1, \dots n)$ megoldása (VII')-nek, ha

a, mindegyik φ_i folytonosan differenciálható

b, $(x, \varphi_1(x), \dots \varphi_n(x)) \in T$ $\forall x \in J$

c, $\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \dots \varphi_n(x))$ $\forall x \in J$ $(i=1, \dots n)$

d, $\xi \in J$ és $\varphi_i(\xi)=\eta_i$ $(i=1, \dots n)$

Def.: Legyen $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartomány, $f: T \to \mathbb{R}^n$ folytonos, $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $(\xi, \eta) \in T$.

$\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ megoldása az

(VIII) (VIII) $y(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y(t))\,dt$ differenciálegyenletnek, ha

a, f folytonos

b, $\varphi \subset T$

$$c; \quad \varphi(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \qquad \forall x \in J$$

Tétel: Legyen $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartomány, $f: T \to \mathbb{R}^n$ folytonos, $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $(\xi, \eta) \in T$.

$\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ megoldása (VII)-nek, $\Leftrightarrow$ ha megoldása (VIII)-nak.

BIZ. Hf.

Peano-tétel:

Legyen $T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartomány, $f: T \to \mathbb{R}^n$ folytonos. Ekkor (VII)-nek minden $(\xi, \eta) \in T$ esetén $\exists$ megoldása.

(a megoldás nem egyértelmű)

Teljes mego., határtól-határig tartó mego., lokális és globális Lipschitz-feltétel.

A definíció ugyanaz, csak a φ intervallumot képez $\mathbb{R}^n$-be.

Picar-Lindelöf-féle egzisztencia-unicitás tétel:

$T \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f: T \to \mathbb{R}^n$ folytonos

Ha f lokális Lipschitz-feltételnek tesz eleget T-n (a második vektorváltozójában), akkor (VII)-nek minden $(\xi, \eta) \in T$ esetén egyértelműen létezik megoldása, amely T-ben határtól határig halad.

BIZ.: kontrakció-ömelvzás

III. 22.

6. előadás

$I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $a_{ij}, b_i : I \to \mathbb{R}$ folytonosak

(1x)
$$\left.\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + \dots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x) \\ &\vdots \\ y_i'(x) &= a_{i1}(x)y_1(x) + \dots + a_{in}(x)y_n(x) + b_i(x) \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1(x) + \dots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x) \end{aligned}\right\}$$

$A(x) := (a_{ij}(x))_{n \times n}$ $\quad B(x) := (b_i(x))_{n \times 1}$ $\quad y(x) := (y_i(x))_{n \times 1}$

$y'(x) := (y_i'(x))_{n \times 1}$

(1x) $\quad y'(x) = A(x)y(x) + B(x)$

$T : I \times \mathbb{R}^n$ $\quad f(x,y) := A(x)y + B(x)$

$f : T \to \mathbb{R}^n$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |A(x)(y_1 - y_2)| = *$$

$$y_1 := (y_{11}, \dots y_{1n}) \quad ; \quad y_2 := (y_{21} \dots y_{2n})$$

$$* = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(x)(y_{1j} - y_{2j}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Tétel: Minden (1x.)-re vonatkozó kezdetiérték problémának egyértelműen létezik teljes megoldása, amelynek értelmezési tartománya az I intervallum