Magasabb rendű differenciál-egyenletek

Df.: Legyen $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f: T \to \mathbb{R}$ folytonos.

$(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n) \in T$, $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. A $\varphi: J \to \mathbb{R}$ fgv

megoldása az (1.) kezdetiérték probléma

$$y^{n}(x) = f(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \qquad (1.)$$
$$y^{(i)}(\xi) = \eta_{i+1} \quad (i = 0, \dots n-1)$$

n-edrendű közönséges explicit differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiértéke problémának, ha teljesülnek:

a, φ n-szer folytonosan diff-ható $\xrightarrow{\text{ezt jelenti}} (\varphi \in C_n(J))$

b, $(x, \varphi(x), \varphi'(x) \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in T \quad \forall x \in J$

c, $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in J$

egyenletrendszere megoldás

d, $\xi \in J \quad \varphi^{(i)}(\xi) = \eta_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$ → kezdetiérték probléma megoldása

(II)

$$\left.\begin{array}{ll} y_1'(x) = y_2(x) & y_1(\xi) = \eta_1 \\ y_2'(x) = y_3(x) & y_2(\xi) = \eta_2 \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1}'(x) = y_n(x) & y_{n-1}(\xi) = \eta_{n-1} \\ y_n'(x) = f(x, y_1(x), \dots, (y_n(x)) & y_n(\xi) = \eta_n \end{array}\right\} \qquad (II.)$$

Tétel: (Átvikli elv)

Ha $\varphi: J \to \mathbb{R}$ megoldása (I.)-nek $\Rightarrow$ a $\Psi: J \to \mathbb{R}^n$, $\Psi(x) := (\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$ megoldása (II.)-nek.

Megfordítva, ha $\Psi: J \to \mathbb{R}^n$ megoldása (II.)-nek $\Rightarrow$ első koordináta fgv-e megoldása (I.)-nek.

BIZ.: (F)

Tétel: Legyen $T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány és $f: T \to \mathbb{R}$ fgv. folytonos.

Ha létezik a $\partial_2 f, \ldots, \partial_n f$ parciális deriváltak és ezek

2. változó szerinti parciális derivált

folytonosak $\Rightarrow$ (1.)-nek minden $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \in T$ esetén egyértelműen létezik teljes megoldása, amely T-ben határtól határig halad.

(az átírás elvből bizonyítható + az elsőrendű e.r.-re vonatkozó P.-Lindelöff féle e.u. tétele által)

N-ed rendű lineáris differenciálegyenletek

$J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $a_i, b: J \to \mathbb{R}$ folytonosak $(i = 1 \ldots n)$

(1.) $\quad y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x) y'(x) + a_n(x) y(x) = b(x)$

(1'.) $\quad y^{n}(x) = -\sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)}(x) + b(x) \quad \Rightarrow$ explicit alak

$T := J \times \mathbb{R}^n \qquad f: T \to \mathbb{R}, \quad f(x, y_1, \ldots, y_n) := -\sum_{i=1}^{n} a_i(x) y_{n-i} + b(x)$

$y_1'(x) = 0 y_1(x) + y_2(x) + 0 y_3(x) + 0 y_4(x) + \ldots + 0 y_n(x)$ ekvivalens az n-edrendű diff. e.-tel.

$y_2'(x) = 0 + 0 + y_3(x) + 0 + \ldots + 0$

$\vdots$

$y_{n-1}'(x) = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + y_n(x)$

$y_n'(x) = -a_n(x) y_1(x) - a_{n-1}(x) y_2(x) - \ldots - a_1(x) y_n(x) + b(x)$

$$\mathcal{A}(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(x) & \dots & \dots & -a_2(x) & -a_1(x) \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$$

(1.) ekvivalens az $y'(x) = \mathcal{A}(x)y(x) + \mathcal{B}(x)$ elsőrendű lineáris differenciál-egyenlet-rendszerrel.

Tétel: Minden (1)-re vonatkozó kezdetiérték problémának egyértelműen $\exists$ teljes megoldása, amelynek értelmezési tartománya az I intervallum.

Def.: (1)-et homogénnek nevezzük, ha $b(x) = 0$ $\forall x$-re, egyébként inhomogénnek.

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0 \rightarrow \text{homogén egyenlet} \qquad \text{(II.)}$$

Def.: (II.)-nek a $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) := 0$ fgv. megoldása (TRIVIÁLIS megoldás)

7. előadás

III. 29.

$$(1) \quad y^{n}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = b(x)$$

$$(2) \quad y^{n}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0$$

Zéruselem : konstans zérusvektor
inverz

$\Big\}$ vektortér
lin. függetlenek.

Def.: $f_1, \dots ; f_n : J \to \mathbb{R}$ lin. függetlenek, ha a $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) = 0$ $\forall x$-re egyenlőségből $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 0$ következik $(c_i \in \mathbb{R})$

Tétel: Ha $f_1, \dots, f_k : J \to \mathbb{R}$ nyílt intervallum $(k \in \mathbb{N})$ megoldásai (2)-nek $\Rightarrow$ a $f : J \to \mathbb{R}$ $f(x) := \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x)$ $(c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R})$ fgv is megoldása (2)-nek.

BIZ.: $$f^{n} + \sum_{i=1}^{n} a_i f^{(n-i)} = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{k} c_j \cdot f_j^{(n-i)} \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot f_j^{(n)} + \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f_j^{(n-i)} = \sum_{j=1}^{k} c_j \underbrace{\left(f_j^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f_j^{(n-i)} \right)}_{0\text{, mert mego.}} = 0$$

(Megoldások lineáris kombinációja is megoldás.)

Def.: A (2) egy $f_1 \dots f_n$ megoldásrendszerét a (2) alaprendszerének nevezzük, ha lineárisan függetlenek.

Def.: Legyenek $f_1, \dots, f_n : J \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-szer differenciálhatók.

$W_{(f_1 \dots f_n)} : J \to \mathbb{R}$, $W_{(f_1 \dots f_n)}(x) := W(x)$

$$W(x) := \begin{vmatrix} f_1(x) ; & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) ; & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$ Wronski-determináns

$f_{ij} : J \to \mathbb{R}$ differenciálhatók, $D : J \to \mathbb{R}$,

$D(x) := \det(f_{ij}(x))_{n \times n}$

$D(x) = \sum_{(n!)} (-1)^{\sigma(i_1 \dots i_n)} f_{1i_1}(x) \cdot f_{2i_2}(x) \cdot \dots \cdot f_{ni_n}(x)$

számú tagja van

$$D'(x) = \sum \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\sigma(i_1,\dots,i_n)} f_{1i_1}(x) \cdot \dots f_{j-1,i_{j-1}}(x) f'_{ji_j}(x) f_{j+1,i_{j+1}} \cdot \dots$$

$$\dots f_{ni_n}(x) = \left(\begin{vmatrix} f'_{11}(x) \dots f'_{1n}(x) \\ f_{21}(x) \dots f_{2n}(x) \\ \vdots \end{vmatrix} \right)$$

n db. olyan determináns összege, amelyben mindig egy sorban a szóban forgó fgv-ek deriváltja szerepel a többi pedig változatlan.

Tétel: Ha. $f_1 \dots f_n : J \to \mathbb{R}$ fgv-ek megoldásai (2)-nek $\Rightarrow$

$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt}$ $\forall\, x \in J$, ahol $x_0 \in J$ tetszőlegesen rögzített, $W := W(f_1, \dots, f_n)$

Vagy mindenütt 0, vagy sehol sem a W det.

(Liouville - formula) (Liövill)

BIZ.:

$$W := \begin{vmatrix} f_1 \dots f_n \\ f'_1 \dots f'_n \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)} \dots f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad W \text{ differenciálható}$$

$$W'(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) \dots f_n(x) \\ f'_1(x) \dots f'_n(x) \\ \vdots \\ f_1^{(n-2)}(x) \dots f_n^{(n-2)}(x) \\ f_1^{(n)}(x) \dots f^{n}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(x) \dots f_n(x) \\ \vdots \\ f_1^{(n-2)}(x) \dots f_n^{(n-2)}(x) \\ -\sum_{i=1}^{n} a_i(x) f_1^{(n-i)}(x) \dots -\sum_{i=1}^{n} a_i(x) f_n^{(n-i)}(x) \end{vmatrix} =$$

$= -a_1(x)\, W(x)$ $\forall\, x \in J \Rightarrow W$ megoldása az

$y'(x) + a_1(x)\, y(x) = 0$ $y(x_0) = W(x_0)$ kezdeti érték problémára.

általános mego.

$W(x) = c\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt}$ a kezdeti feltétel miatt

$c = W(x_0)$

Köv: Ha $f_1 \dots f_n : J \to \mathbb{R}$ megoldásai (2)-nek $\Rightarrow$ Wronszki determinánsuk vagy mindenütt 0, vagy sehol sem 0.

Tétel: A (2) egy $f_1 \dots f_n$ megoldásrendszere $\Leftrightarrow$ alaprendszere (2)-nek, ha Wronszki determinánsuk sehol sem 0.

BIZ.: $\Rightarrow$ $c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in J;\ c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$

Ha ez fgv $\Rightarrow$ n-nek folytonosan diff-ható

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow c_1 \cdot f_1'(x) + \dots + c_n f_n'(x) = 0 \\ &\quad \vdots \\ &c_1 f_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n \cdot f_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{aligned}\right\} \text{homogén lin. egyenletrendszer}$$

- Ha $W(x) \neq 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

$\Rightarrow$ akkor az egyenletrendszernek csak triviális megoldása van

$\Leftarrow$ Ha alaprendszer $\Rightarrow$ a W det. sehol sem 0.

(Ez a rész hosszú, nem kell.) Szükséges feltétel, ami elegendő.

Tétel: Ha $f_1 \dots f_n$ alaprendszere (2)-nek és f megoldása a (2)-nek $\Rightarrow \exists\ c_1; c_2; \dots; c_n \in \mathbb{R}$, amelyekkel $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i$

BIZ.: —

Tétel: (Konstans variálás módszere)

Ha $f_1, \dots, f_n : J \to \mathbb{R}$ alaprendszere (2)-nek és $c_i : J \to \mathbb{R}$ $(i = 1; \dots; n)$ olyan folytonosan differenciálható fgv-ek, amelyekre

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, f_i^{(j)}(x) = 0 \qquad (j = 0; \dots; n-2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, f_i^{(n-1)}(x) = b(x)$$

akkor a $f_p : I \to \mathbb{R}$, $f_p(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i(x) f_i(x)$ megoldása (1)-nek

BIZ.: f_p differenciálható folytonosan

$$f_p' = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i' f_i}_{\leftarrow\, 0,\ \text{mert}\ *} + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i' = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i'$$

$$f_p'' = \sum_{i=1}^{n} c_i' f_i' + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i'' = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i''$$

$$\vdots$$

$$f_p^{(n-2)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i^{(n-2)}$$

$$f_p^{(n-1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i' f_i^{(n-2)}}_{0,\ *\ \text{miatt}} + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i^{(n-1)}$$

$$f_p^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i' \cdot f_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i^{(n)} = b(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot$$

$$\left(-\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot f_i^{(n-j)}\right) = b(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i^{(n-j)}\right) =$$

$$= b(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot f_p^{(n-j)} \Rightarrow f_p \text{ megoldása (1)-nek.}$$

$$c_i'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cdots & \begin{matrix} i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{matrix} & \cdots \end{vmatrix}}{W(f_1 \dots f_n)(x)}$$

$\leftarrow$ csak az i-dik oszlopot cseréljük ki, a többi a W_i det

$\exists$ primitív fgv $\to c_i$ megoldható

Tétel: Ha f_p megoldása (1)-nek, úgy f ($\Leftrightarrow$) megoldása (1)-nek, ha $f - f_p$ megoldása (2)-nek.

BIZ.: feladat

különbségek diff-lása

8. előadás

Konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletek

(3) $y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0 \quad a_i \in \mathbb{R}$

$T := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$), $\varphi(x) := e^{\lambda x}$

$\lambda^n e^{\lambda n} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0 \quad / : e^{\lambda x}$

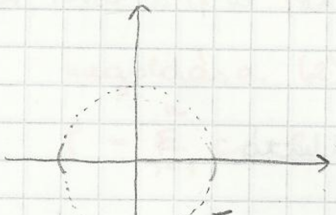
(4) $P(\lambda) := \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$

4: (3) karakterisztikus egyenlete

φ megoldása (3)-nak $\Leftrightarrow P(\lambda) = 0$.

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp z := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ inhomogén egyenlet

komplex számsorozatot elő lehet állítani 2 valós számsorozattal



ha egy hatványsort kiterjesztünk komplex-re $\Rightarrow$ konvergencia kör alakul ki.

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$

tagonként deriválva ugyanazt a hatványsort kapjuk vissza.

$z : x+iy \Rightarrow e^{z} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad , \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

(φ valós $\Rightarrow \varphi \in \mathbb{R}$
képzetes tengely mentén vizsgáljuk)
$\varphi \in \mathbb{C}$
$\Downarrow$
nem fontos, hogy valós legyen

$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$

$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

$\lambda \in \mathbb{C} \quad , \lambda := \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0)$

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$$

valós $\rightarrow \mathrm{Re}\,(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x}\cos\beta x$

imagin. (képzetes) $\rightarrow \mathrm{Im}\,(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x}\sin\beta x$

Tétel: Ha

$$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_r)^{k_r}(\lambda-\mu_1)^{l_1}(\lambda-\bar{\mu}_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\mu_s)^{l_s}(\lambda-\bar{\mu}_s)^{l_s}$$

a polinom gyöktényezős alakja

$\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \ (j \neq i), \ \mu_i \in \mathbb{C}, \ \mu_i \neq \mu_j \ (i \neq j),$

$\mu_j := \alpha_j + \beta_j \quad (\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}, \ \beta_j \neq 0) \qquad k_i, l_i \in \mathbb{N}$

$$k_1 + \ldots + k_r + 2(l_1 + \ldots + l_s) = n,$$

(valós együtthatós polinomnak α gyöke $\Rightarrow \bar{\alpha}$ ugyanannyi multiplicitással gyöke.)

akkor (3) alaprendszere

$$\begin{array}{l}
e^{\lambda_1 x}, \ x e^{\lambda_1 x}, \ \ldots, \ x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x} \\
\vdots \\
e^{\lambda_r x}, \ x e^{\lambda_r x}, \ \ldots, \ x^{k_r - 1} e^{\lambda_r x} \\
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \ x e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \ \ldots, \ x^{l_1 - 1} e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x
\end{array}$$

$e^{\alpha_1 x}\cdot \sin\beta_1 x,\ x e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ \dots,\ x^{\ell_1-1} e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x$

$\vdots$

$e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x,\ x e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x,\ \dots,\ x^{\ell_s-1} e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x$

$e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x,\ x e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x,\ \dots,\ x^{\ell_s-1} e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x$

ez az n fgv alkotja az alaprendszert.

Görbe menti integrál

Analízis könyv

Korlátos változású fgv-ek.

Def.: Legyen $[a,b]\subset\mathbb{R}$; $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $D\in\mathcal{D}([a,b])$,

$D:=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

$V(f\,[a,b],D) := \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})|$ VARIÁCIÓ

az osztópontokhoz tartozó fgv értékek közti változásokat adjuk össze.

$V(f,[a,b]) := \sup\{V(f,[a,b],D) : D\in\mathcal{D}([a,b])\}$

TOTÁLIS VARIÁCIÓ

f korlátos változású $[a,b]$-n, ha $V(f,[a,b]) < +\infty$.

pontos felső korlát (totális variációnak)

Ha $V(f,[a,b])=0 \Rightarrow f$ konstans fgv.

a monoton fgv-eknél könnyű kiszámolni a totális variációt

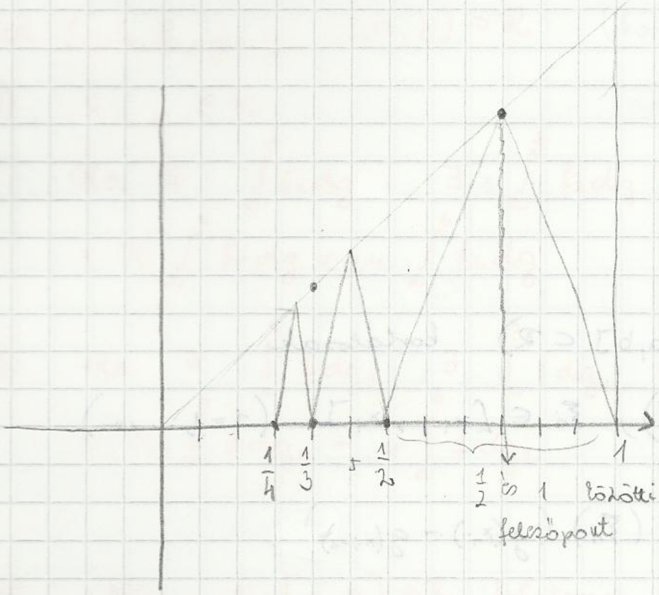
Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow$ f korlátos változású;

$$V(f,[a,b]) = |f(a)-f(b)|$$

(abszolút érték azért kell, h. csökkenő lenne.)

ha f korlátos változású $\Rightarrow$ f korlátos

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\quad f(x):=\begin{cases}0, & \text{ha } x=0\\ \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$



$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n}|f'(\xi_i)|(x_i-x_{i-1}) \le K(b-a), \text{ ha } |f'(x)|\le K$$

ha ez differenciálható $\qquad$ Lagrange $\qquad$ ($\forall x$-re)

ha f diff és korlátos $\Rightarrow$ korlátos változású

Tétel: Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$.

Ha f korlátos változású $[a,c]$ és $[c,b]$-n $\Rightarrow$ korlátos változású $[a,b]$-n, és $V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])$.